ECUACIONES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

HÉCTOR LOMELÍ Y BEATRIZ RUMBOS†

Resumen. En esta nota estudiamos la estructura del espacio vectorial de soluciones de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes.

1. Operadores lineales y ecuaciones

En un buen número de textos de ecuaciones diferenciales, incluído el texto de los autores de esta nota [1], se justifica intuitivamente el que se requieran n soluciones independientes para generar la solución general de una ecuación lineal de orden n. Asimismo, la forma explícita de las soluciones se proporciona *a priori* sin mucha motivación acerca del camino que condujo a su elección, de manera que podría pensarse que son producto de un chispazo de inspiración divina. La razón formal no es enteramente trivial y requiere de la utilización de algunos resultados para operadores lineales en espacios vectoriales. A continuación justificamos formalmente estos hechos, suponiendo de antemano que el estudiante posee conocimientos mínimos de álgebra lineal y, evidentemente, de ecuaciones diferenciales.

Tomemos una ecuación diferencial lineal del tipo

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{x} + a_0 x = b, \tag{1.1}$$

con $a_i \in \mathbb{R}$ para toda i y $a_n \neq 0$. Recordemos que la solución general x está dada por

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

en donde x_p es cualquier solución particular de (1.1) y x_h es la solución general de la ecuación homogénea asociada, dada por

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{x} + a_0 x = 0.$$

De acuerdo a lo anterior podemos dividir el proceso para encontrar la solución de la ecuación (1.1) en dos pasos: primero se resuelve la ecuación homogénea asociada y después se encuentra una solución particular de la ecuación original. Como $a_n \neq 0$, la ecuación puede dividirse entre a_n a manera de que el coeficiente de $x^{(n)}$ sea igual a la unidad. Por esta razón, sin pérdida de generalidad, para encontrar x_h podemos asumir que la ecuación homogénea asociada es de la forma

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{x} + a_0 x = 0. \tag{1.2}$$

Una pregunta natural es ¿en qué espacio viven las soluciones de estas ecuaciones? Observemos que si x_h es solución de (1.2); entonces, debe cumplirse que x_h es una función con n

derivadas continuas lo cual se denota como sigue[1]:

$$x_h \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Más aún, como x_h satisface (1.2) se cumple

$$x^{(n)} = -a_{n-1}x^{(n-1)} - \cdots - a_1\dot{x} - a_0 x.$$

Por lo tanto, al derivar esta expresión se obtiene:

$$x^{(n+1)} = -a_{n-1}x^{(n)} - \cdots - a_1\ddot{x} - a_0 \dot{x}.$$

Dado que el lado derecho de la igualdad anterior está bien definido, concluimos que

$$x_h \in \mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R});$$

es decir, si x_h tiene n derivadas continuas, entonces tendrá $n + 1$ derivadas continuas. Por inducción, se concluye que x_h es infinitamente diferenciable lo cual denotamos por:

$$x_h \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

De lo anterior concluimos que las soluciones de (1.2) son elementos de $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ que es el espacio vectorial (que tiene como campo escalar a $\mathbb{R}$) de funciones

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

infinitamente diferenciables.

El codominio de las funciones de clase $\mathcal{C}^{\infty}$ puede extenderse a los números complejos sin problema, como se describe a continuación. Pensemos en que[2]

$$x(t) = a(t) + ib(t)$$

en donde a y b son funciones reales infinitamente diferenciables. Así, puede definirse la derivada de x como

$$\dot{x}(t) = \dot{a}(t) + i\dot{b}(t)$$

de manera que la función

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

también es infinitamente diferenciable como función sobre los números complejos. Sea $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ el conjunto de dichas funciones. Claramente, $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tiene estrucutra de espacio vectorial con el campo de escalares igual a $\mathbb{C}$.

En este espacio vectorial definimos una función lineal, u operador lineal

$$D : \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

dado por

$$D(x) = \dot{x}.$$

[1]En particular si $n = 0$, se tiene que $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ se refiere al conjunto de funciones continuas.

[2]Recordemos que $i \equiv \sqrt{-1}$. Lo que se hace es extender el campo de escalares de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$.

Este operador se denomina, por razones obvias, **operador diferencial**. Podemos componer a D consigo mismo para obtener el operador

$$D^n(x) := x^{(n)}.$$

En particular, si $n = 0$ se tiene que $D^0 = I$ en donde

$$I : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

es el operador identidad $I(x) = x$. En términos de combinaciones lineales de estos operadores, la ecuación (1.2) puede expresarse alternativamente como

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I)(x) = 0,$$

en donde el operador $D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I$ es lineal puesto que es combinación lineal de operadores lineales.

Recordemos que si V y W son espacios vectoriales, a cada operador lineal

$$F : V \to W$$

se le asocian los siguientes subespacios vectoriales de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} \ker F &= \{x \in V \mid F(x) = 0\} \subset V, \\ \operatorname{Im} F &= \{y \in W \mid F(x) = y \text{ para alguna } x \in V\} \subset W, \end{aligned}$$

llamados el **kernel** (o **núcleo)** del operador y la **imagen** del operador, respectivamente.

Notemos que, de esta forma, x_h es solución de (1.2) si y sólo si se cumple

$$x_h \in \ker(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I). \tag{1.3}$$

En otras palabras, las soluciones de (1.2) forman un subespacio vectorial que es, concretamente, el kernel de cierto operador diferencial. Lo que queremos ahora es encontrar la dimensión de este espacio y proporcionar una base para generar todas las soluciones.

Dado cualquier espacio vectorial V, no necesariamente de dimensión finita, se cumple el siguiente resultado que será fundamental para todo lo que sigue.

Lema 1.1. *Sea V un espacio vectorial cualquiera. Si $F, G : V \to V$ son dos operadores lineales tales que* $\ker F \subset \operatorname{Im} G$ *y* $\dim \ker F = m, \dim \ker G = n$*; entonces,* $\dim \ker FG = m + n$.

Demostración. Sean $\{v_1, \ldots, v_m\}, \{w_1, \ldots, w_n\}$, respectivamente, bases[3] de $\ker F$ y $\ker G$. Dado $v \in \ker FG$ se cumple $FG(v) = 0$ con lo cual $G(v) \in \ker F$. Por lo tanto existen escalares a_i, $i = 1, \ldots, m$ tales que

$$G(v) = \sum_{i=1}^{m} a_i v_i.$$

[3]Observemos que el conjunto $\{v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n\}$ no necesariamente es linealmente independiente.

Como $\ker F \subset \operatorname{Im} G$, existen $\hat{v}_i \in V$ tales que $G(\hat{v}_i) = v_i$, con lo cual se cumple

$$G\left(v - \sum_{i=1}^{m} a_i \hat{v}_i\right) = 0$$

o, equivalentemente,

$$v - \sum_{i=1}^{m} a_i \hat{v}_i \in \ker G.$$

Por lo tanto, existen escalares b_j tales que

$$v - \sum_{i=1}^{m} a_i \hat{v}_i = \sum_{i=1}^{n} b_j w_j$$

de manera que

$$v = \sum_{i=1}^{n} b_j w_j + \sum_{i=1}^{m} a_i \hat{v}_i.$$

Es inmediato verificar que tanto los elementos w_j como los $\hat{v}_i$ pertenecen a $\ker FG$ con lo cual, dado que las consideraciones anteriores muestran que cualquier elemento de $\ker FG$ puede expresarse como combinación lineal de estos $m + n$ vectores, se cumple que $\dim(\ker FG) \leq m + n$.

Para finalizar la demostración debemos argumentar que el conjunto de generadores

$$\{\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_m, w_1, \ldots, w_n\}$$

es linealmente independiente. En efecto, dados escalares $c_1, \ldots, c_m$ y $d_1, \ldots, d_n$ tales que

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \hat{v}_i + \sum_{i=1}^{n} d_j w_j = 0, \tag{1.4}$$

utilizando el hecho de que los w_i pertenecen a $\ker G$, se tendría:

$$G\left(\sum_{i=1}^{m} c_i \hat{v}_i + \sum_{i=1}^{n} d_j w_j\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i v_i + \sum_{i=1}^{n} d_j G(w_j) =$$
$$\sum_{i=1}^{m} c_i v_i = 0.$$

Como los v_i forman una base de $\ker F$ debe cumplirse que $c_i = 0$ para toda i. Entonces, la expresión (1.4) se reescribe como

$$\sum_{i=1}^{n} d_j w_j = 0.$$

Ahora bien, como los vectores w_j forman una base de $\ker F$ entonces todos los escalares d_j también son nulos y de este modo concluimos que el conjunto $\{\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_m, w_1, \ldots, w_n\}$ es linealmente independiente.

Como este conjunto de $m+n$ vectores es generador de $\ker FG$ y es linealmente independiente se concluye que es una base de dicho subespacio y por lo tanto se obtiene que

$$\dim(\ker FG) = m+n,$$

concluyendo la demostración. $\square$

Nota 1.2. Los escalares del lema anterior no se especifican de antemano. El resultado se aplica, en particular, para el caso en que los escalares sean elementos de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Los siguientes corolarios son consecuencia inmediata del lema anterior.

Corolario 1.3. *Sea V un espacio vectorial cualquiera. Si $F, G : V \to V$ son dos operadores lineales tales que G es suprayectivo (sobre) y $\dim \ker F = m, \dim \ker G = n$; entonces, $\dim \ker FG = m+n$.*

Corolario 1.4. *Sean $F_1, \dots, F_\ell : V \to V$ ℓ operadores lineales suprayectivos con $\dim \ker F_i = n_i$. Entonces la composición $F_1 \circ \cdots \circ F_\ell$ es un operador lineal suprayectivo y*

$$\dim \ker (F_1 \circ \cdots \circ F_\ell) = n_1 + \cdots + n_\ell.$$

Como veremos a continuacin, para estudiar las ecuaciones lineales que nos ocupan, conviene escribir a los operadores lineales como composición de operadores simples.

2. Factorizando el operador

Dada la ecuación (1.2), consideramos el polinomio característico asociado dado por

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0. \tag{2.1}$$

Una consecuencia del teorema fundamental del álgebra es que este polinomio puede factorizarse sobre los números complejos en términos de polinomios lineales; es decir, existen números complejos $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{C}$ tales que

$$p(z) = (z-r_1)(z-r_2)\cdots(z-r_n). \tag{2.2}$$

En este caso $r_1, \dots, r_n$ son las raíces del polinomio $p(z)$, no necesariamente distintas. Igualando (2.1) con (2.2) puede obtenerse la conocida relación entre coeficientes y raíces dada por:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} r_i &= -a_{n-1},\\
\left(\sum_{i<j} r_i r_j\right) &= a_{n-2},\\
\sum_{i<j<k} r_i r_j r_k &= -a_{n-3},\\
&\vdots\\
r_1 r_2 \cdots r_n &= (-1)^n a_0.
\end{aligned}$$

Para cada $i = 1, \ldots, n$, tenemos los siguientes operadores diferenciales sobre $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$D - r_i I.$$

Obsérvese que dada $x \in \mathcal{C}^\infty$ se tiene

$$\begin{aligned}
&(D - r_n I)(D - r_{n-1} I) \cdots (D - r_1 I)(x) \\
&= x^{(n)} - \left(\sum_{i=1}^{n} r_i \right) x^{(n-1)} + \left(\sum_{i<j} r_i r_j \right) x^{(n-2)} + \cdots + (-1)^n \left(r_1 r_2 \cdots r_n \right) x \\
&= x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{x} + a_0 x \\
&= (D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I)(x).
\end{aligned}$$

En otras palabras, en analogía con el polinomio característico, hemos factorizado al operador diferencial que determina a la ecuación homogénea (1.2) como composición de operadores lineales; es decir,

$$D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I = (D - r_n I)(D - r_{n-1} I) \cdots (D - r_1 I).$$

En general, podemos definir un operador diferencial lineal como sigue:

$$p(D) = D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I,$$

de manera que la ecuación (1.2) se expresa simplemente como

$$p(D)(x) = 0.$$

Como vimos anteriormente, las soluciones a esta ecuación consisten en el kernel del operador $p(D)$, que por lo pronto (tomando en cuenta que las raíces pueden ser complejas), es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

La factorización anterior, ya sea del polinomio o del operador, puede tomar en cuenta la existencia de raíces múltiples de manera que, en el caso general, existen $r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{C}$ números complejos distintos, en donde $m \leq n$, y $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$ que cumplen

$$\sum_{j=1}^{m} k_j = n,$$

y tales que (2.1) se factoriza como

$$p(z) = (z - r_1)^{k_1} (z - r_2)^{k_2} \cdots (z - r_m)^{k_m}.$$

Similarmente,

$$p(D) = (D - r_1 I)^{k_1} (D - r_2 I)^{k_2} \cdots (D - r_m I)^{k_m}.$$

A continuación se demostrará que el subespacio de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$,

$$\ker p(D) = \ker (D - r_1 I)^{k_1} (D - r_2 I)^{k_2} \cdots (D - r_m I)^{k_m}$$

tiene dimensión n, de manera que para resolver la ecuación (1.2) se requerirá de una base para este espacio de soluciones, es decir de n soluciones linealmente independientes.

Lema 2.1. *Dado cualquier escalar $r \in \mathbb{C}$, el operador lineal $L = (D - rI)^k$ es suprayectivo y* $\dim(\ker L) = k$.

Demostración. Procedemos por inducción sobre k. Sea $k = 1$, tenemos que $\ker(L)$ consiste de las $x_h(t)$ que son soluciones de la ecuación

$$\dot{x}_h - r x_h = 0. \tag{2.3}$$

Notemos que multiplicando (2.3) por $e^{-r\,t}$ se sigue:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-r\,t} x_h(t)\right) = 0.$$

Por lo tanto, existe un número $A \in \mathbb{C}$, tal que $e^{-r\,t} x_h(t) \equiv A$ y

$$x_h(t) = A e^{rt};$$

es decir, $\{e^{rt}\}$ es una base del espacio de soluciones $-$ o bien de $\ker L-$ y éste es de dimensión uno.

Para probar que L es suprayectivo sea $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ cualquier función en el codominio del operador. Tenemos que encontrar una función $x_p \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ en el dominio tal que se cumpla:

$$(D - rI)x_p = y,$$

equivalentemente, que sea solución de la ecuación

$$\dot{x}_p - r x_p = y. \tag{2.4}$$

Al igual que hicimos arriba, al multiplicar por el factor $e^{-r\,t}$ se obtiene,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-r\,t} x_p(t)\right) = e^{-r\,t} y$$

De manera que, integrando, se obtiene:

$$x_p(t) = e^{r\,t} \int_0^t e^{-r\,s}\, y(s)\, ds. \tag{2.5}$$

Supongamos que el resultado es válido para $k-1$ de manera que $\dim \ker(D - rI)^{k-1} = k-1$. Tomemos $L = (D - rI)^k$. Ahora bien,

$$L = (D - rI)^{k-1}(D - rI),$$

así que definiendo

$$F = (D - rI)^{k-1},$$
$$G = D - rI,$$

tenemos que se cumplen los supuestos de (1.3) y por lo tanto

$$\dim \ker L = (k-1) + 1 = k.$$

Finalmente, es trivial verificar que la composición de operadores suprayectivos también es suprayectiva con lo cual concluimos la demostración. $\square$

Nota 2.2. La notación utilizada de x_h y x_p para los elementos de $\ker L$ y de la imagen inversa $L^{-1}(y)$ no son casuales; simplemente son consistentes con la notación usual de sistemas lineales en referencia a las soluciones de la ecuación homogénea y a soluciones particulares.

Nota 2.3. Las demostraciones de (1.3) y (2.1), nos proporcionan una forma explícita de construir una base para $\ker(D - rI)^k$, veamos. Sean

$$F = D - rI,$$
$$G = D - rI,$$

de manera que $k = 2$. En este caso, como vimos en (2.1), las bases para $\ker F$ y $\ker G$ están generadas por $\{e^{rt}\}$. Ahora bien, de acuerdo a (1.3) la base de $\ker FG$ tiene dimensión 2 y se construye tomando $\{e^{rt}\}$ y agregándole un elemento de la imagen inversa $G^{-1}(e^{rt})$; es decir, se busca una función x tal que

$$G(x) = e^{rt}$$

o bien que resuelva la ecuación

$$(D - rI)x = \dot{x} - rx = e^{rt}.$$

Esta solución la obtenemos mediante (2.5) poniendo $y(s) = e^{rs}$ de manera que

$$x(t) = te^{rt}.$$

De esta forma se tiene que $\ker FG$ está generado por el conjunto $\{e^{rt}, te^{rt}\}$. Para el caso $k = 3$ tomamos

$$F = (D - rI)^2,$$
$$G = D - rI,$$

Sabemos que una base de $\ker F$ es $\{e^{rt}, te^{rt}\}$ y una base de $\ker G$ es $\{e^{rt}\}$. Así, la base de $\ker FG$ se conforma por $\{e^{rt}\}$ y dos elementos más, digamos $\{x, y\}$. El primero satisface $G(x) = e^{rt}$ y el segundo $G(y) = te^{rt}$, es decir, son preimágenes de los elementos de la base de $\ker F$. Éstos se encuentran resolviendo

$$(D - rI)x = \dot{x} - rx = e^{rt},$$
$$(D - rI)y = \dot{y} - ry = te^{rt},$$

cuya solución se obtiene mediante (2.5) como

$$x(t) = te^{rt},$$
$$y(t) = t^2e^{rt}.$$

Se tiene así que la base de $\ker FG$ está dada por $\{e^{rt}, te^{rt}, t^2e^{rt}\}$. Siguiendo este mismo procedimiento en forma recursiva puede concluirse que una base para $\ker(D - rI)^k$ está dada por el conjunto de funciones:

$$\{e^{rt}, te^{rt}, \dots, t^{k-1}e^{rt}\}.$$

Proposición 2.4. *Con la misma notación dada arriba se cumple que si*

$$p(D) = (D - r_1 I)^{k_1}(D - r_2 I)^{k_2} \cdots (D - r_m I)^{k_m},$$

entonces,

$$\dim \ker p(D) = \dim \ker (D - r_1 I)^{k_1}(D - r_2 I)^{k_2} \cdots (D - r_m I)^{k_m} = n$$

Demostración. La demostración es trivial, pues de acuerdo a los comentarios anteriores podemos dar explícitamente una base con $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} k_i = n$ elementos como

$$\bigcup_{i=1}^{m} \{e^{r_i t}, t e^{r_i t}, \ldots, t^{k_i - 1} e^{r_i t}\}.$$

□

La demostración del siguiente corolario es ahora inmediata:

Corolario 2.5. *Si $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{C}$ son todas las raíces complejas (no necesariamente distintas) de $p(z)$, entonces,*

$$\dim \ker p(D) = \dim \ker (D - r_1 I) \cdots (D - r_n I) = n.$$

De acuerdo a lo anterior tenemos que el subespacio de soluciones de la ecuación lineal homogénea (1.2) es de dimensión n. Ésta es la razón por la cual es suficiente encontrar n soluciones linealmente independientes para expresar la solución general. Asimismo, se mostró cómo construir la base del espacio de soluciones. Sabemos que para cada raíz r_i del polinomio característico la función $e^{r_i t}$ es una solución, en particular, si no hay raíces repetidas las n soluciones independientes están generadas por

$$\{e^{r_1 t}, \ldots, e^{r_n t}\}.$$

El caso general es un poco más complicado pero lo podemos ilustrar con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.6. Dada la ecuación

$$\ddddot{x} - 2\dddot{x} + 2\dot{x} - 1 = 0, \tag{2.6}$$

ésta se reescribe como

$$(D^4 - 2D^3 + 2D - I)(x) = (D + I)(D - I)^3(x) = 0.$$

Se tiene que

$$\ker(D + I) = \{x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid (D + I)(x) = \dot{x} + x = 0\}.$$

Cuyos elementos son de la forma

$$x(t) = A e^{-t},$$

o bien, $\{e^{-t}\}$ es una base de $\ker(D + I)$. Asimismo,

$$\ker(D - I)^3 = \{x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid (D - I)^3(x) = \dddot{x} - 3\ddot{x} + 3\dot{x} - x = 0\}.$$

De acuerdo al comentario 2.3, una base para $\ker(D-I)^3$ es de dimensión 3 y está dada por

$$\{e^t, te^t, t^2e^t\}.$$

De lo anterior, tenemos que una base para $\ker(D+I)(D-I)^3$ es el conjunto

$$\{e^{-t}, e^t, te^t, t^2e^t\}$$

que genera al espacio de soluciones de la ecuación (2.6); es decir, la solución general de (2.6) está dada por

$$x_h(t) = Ae^{-t} + Be^t + Cte^t + Dt^2e^t,$$

en donde A, B, C, D son constantes (en $\mathbb{C}$) que se determinan a partir de las condiciones iniciales.

Ejemplo 2.7. Dada la ecuación

$$\ddot{x} + x = 0, \tag{2.7}$$

ésta se reescribe como

$$(D^2 + I)x = (D + iI)(D - iI)x = 0.$$

En este caso $\ker(D - iI)$ está generado por $\{e^{it}\}$ y $\ker(D + iI)$ por $\{e^{-it}\}$. Entonces, las soluciones a la ecuación (2.7) están generadas por $\{e^{it}, e^{-it}\}$, o bien son de la forma

$$x(t) = Ae^{it} + Be^{-it}.$$

Cabe señalar que lo que se ha demostrado hasta el momento es el caso complejo y como se ilustró en los ejemplos anteriores, las soluciones viven en el espacio $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. La pregunta natural es, si existe una base para el espacio de soluciones con funciones reales de manera que las soluciones pertenezcan a $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La respuesta es positiva como veremos en la sección 3.

3. El caso real

Los operadores lineales que hemos considerado hasta ahora son operadores diferenciales lineales del tipo

$$p(D) : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}),$$

en donde $p(D)$ es un "polinomio" que se factoriza como producto de operadores (factores) lineales del tipo $(D - \alpha I)$ con $\alpha \in \mathbb{C}$. El kernel de estos operadores coincide con el espacio de soluciones de las ecuaciones diferenciales

$$p(D)x = 0. \tag{3.1}$$

Ahora bien, hasta el momento hemos demostrado que dicho kernel tiene la misma dimensión que el grado del polinomio característico y también se construyó una base para el espacio de soluciones cuyos elementos son funciones en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Así, si el polinomio es de grado n, existirá una base

$$\{z_1(t), \ldots, z_n(t)\},$$

en donde $z_k(t) = \alpha_k(t) + i\beta_k(t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $k = 1, \ldots, n$.

Lema 3.1. *Sea $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ un subespacio de dimensión $2k$ cuya base es de la forma*

$$\mathcal{B} = \{z_1, \ldots, z_{k,} \bar{z}_{1,\ldots,} \bar{z}_k\}. \tag{3.2}$$

Entonces, el conjunto

$$\widehat{\mathcal{B}} = \{\operatorname{Re} z_1, \ldots, \operatorname{Re} z_k, \operatorname{Im} z_1, \ldots, \operatorname{Im} z_k\} \tag{3.3}$$

es también una base de $\mathcal{U}$.

Demostración. Dado que las funciones z_i y $\bar{z}_i$ son linealmente independientes ($i = 1, \ldots, k$) y recordando que el campo escalar es $\mathbb{C}$, debe tenerse que $\operatorname{Re} z_i, \operatorname{Im} z_i \neq 0$. Claramente los conjuntos $\mathcal{B}$ y $\widehat{\mathcal{B}}$ generan el mismo subespacio así que como $\dim \mathcal{U} = 2k$, necesariamente $\widehat{\mathcal{B}}$ es una base de $\mathcal{U}$. □

Nota 3.2. Observemos que $z_i, \bar{z}_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Sin embargo, $\operatorname{Re} z_i, \operatorname{Im} z_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Así, en el caso del ejemplo 2.7 la base $\{e^{it}, e^{-it}\}$ puede sustituirse por el conjunto de funciones reales $\{\sin t, \cos t\}$. Como es bien sabido, si un polinomio $p(z)$ tiene coeficientes reales, entonces $r \in \mathbb{C}$ es una raiz si y sólo si $\bar{r}$ también lo es. De esta forma, de acuerdo a la proposición (2.4) si r y $\bar{r}$ tienen multiplicidad k, el conjunto

$$\{e^{rt}, te^{rt}, \ldots, t^{k-1}e^{rt}, e^{\bar{r}t}, te^{\bar{r}t}, \ldots, t^{k-1}e^{\bar{r}t}\}$$

–que sabemos puede completarse a una base de $\ker p(D)$– puede sustituirse por el siguiente conjunto de funciones reales[4]:

$$\begin{aligned}
&\{e^{(\operatorname{Re} r)t} \cos((\operatorname{Im} r)t), e^{(\operatorname{Re} r)t} t \cos((\operatorname{Im} r)t), \ldots, e^{(\operatorname{Re} r)t} t^{k-1} \cos((\operatorname{Im} r)t), \\
&e^{(\operatorname{Re} r)t} \sin((\operatorname{Im} r)t), e^{(\operatorname{Re} r)t} t \sin((\operatorname{Im} r)t), \ldots, e^{(\operatorname{Re} r)t} t^{k-1} \sin((\operatorname{Im} r)t)\}.
\end{aligned}$$

Proposición 3.3. *El kernel del operador diferencial*

$$p(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I$$

restringido al espacio vectorial real $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tiene dimensión n, como espacio vectorial con escalares en $\mathbb{R}$.

[4]Simplemente hay que notar que

$$e^{rt} = e^{(\operatorname{Re} r)t} e^{i(\operatorname{Im} r)t} = e^{(\operatorname{Re} r)t}(\cos((\operatorname{Im} r)t) + i \sin((\operatorname{Im} r)t),$$

de manera que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} e^{rt} &= e^{(\operatorname{Re} r)t}(\cos((\operatorname{Im} r)t)), \\
\operatorname{Im} e^{rt} &= e^{(\operatorname{Re} r)t} \sin((\operatorname{Im} r)t)).
\end{aligned}$$

Demostración. Ahora tenemos

$$p(D) : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Sea $x(t) \in \ker p(D)$. El lema 3.1 y las observaciones posteriores nos dicen que existen

$$y_1(t), \ldots, y_n(t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

y

$$A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{C}$$

tales que

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=1}^{n} A_i y_i(t) = \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{Re} A_i + i \operatorname{Im} A_i) y_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{Re} A_i) y_i(t) + i \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{Im} A_i) y_i(t). \end{aligned}$$

Como $x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ debe cumplirse

$$\sum_{i=1}^{n} (\operatorname{Im} A_i) y_i(t) = 0$$

y por lo tanto

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{Re} A_i) y_i(t).$$

Tenemos así que $\{y_1(t), \ldots, y_n(t)\}$ es un conjunto generador de $\ker p(D)$. Dado que este conjunto es linealmente independiente en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, también lo será en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de manera que forma una base para $\ker p(D)$ que por lo tanto es un subespacio de dimensión n. □

4. Un método alternativo

Los corolarios 1.3 y 1.4 pueden utilizarse directamente para el caso en el que sólo se consideren funciones en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Esto es, podrían estudiarse las ecuaciones sin necesidad de utilizar números complejos. Esto es una alternativa que nos puede dar un punto de vista diferente.

Consideremos operadores lineales $F : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, con coeficientes constantes. Como hemos visto, dichos operadores tienen que ser de la forma $p(D)$, en donde $p(z)$ es un polinomio con coeficientes reales. Recordemos que $\mathbb{R}$ no es un campo algebraicamente cerrado de manera que las raíces de un polinomio $p(z)$ con coeficientes reales no necesariamente son reales. En particular, esto nos lleva a que los polinomios irreducibles con coeficientes reales no son necesariamente lineales. Sin embargo, es bien sabido que cualquier polinomio mónico con coeficientes reales puede factorizarse como un producto

$$p(z) = (z - r_1) \cdots (z - r_\ell) q_1(z) \cdots q_m(z),$$

en donde $r_1, \dots, r_\ell$ son números reales −no necesariamente distintos− y $q_1(z), \dots, q_m(z)$ son polinomios mónicos de irreducibles de grado dos. Esto es, cada polinomio q_i es de la forma

$$q_i(z) = z^2 + b_i\, z + c_i,$$

en donde b_i, c_i son números reales que satisfacen: $b_i^2 < 4c_i$.

Lema 4.1. *Sea* $q(z) = (z-\alpha)^2 + \beta^2$ *y el operador asociado*

$$q(D) = (D - \alpha\, I)^2 + \beta^2\, I,$$

de manera que

$$q(D + \alpha I) = D^2 + \beta^2\, I.$$

Entonces, para toda $w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *se cumple*

$$e^{\alpha t} q(D + \alpha I)(w) = q(D)(e^{\alpha t} w).$$

Demostración. Basta hacer el siguiente cálculo.

$$\begin{aligned} q(D)(e^{\alpha t} w) &= \left[(D - \alpha\, I)^2 + \beta^2\, I\right](e^{\alpha t} w) = \\ e^{\alpha t}\left(\ddot{w} + 2\alpha\dot{w} - 2\alpha\dot{w} + 2\alpha^2 w - 2\alpha^2 w + \beta^2 w\right) &= \\ e^{\alpha t}\left(\ddot{w} + \beta^2 w\right) &= \\ e^{\alpha t}\left(D^2 + \beta^2\, I\right)(w) &= e^{\alpha t} q(D + \alpha I)(w). \end{aligned}$$

□

El siguiente corolario es inmediato.

Corolario 4.2. $w \in \ker q(D + \alpha I)$ *si y sólo si* $e^{\alpha t} w \in \ker q(D)$.

Lema 4.3. *Sean* $b, c \in \mathbb{R}$ *tales que* $b^2 < 4c$. *Sea* $q(D) : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *el operador lineal dado por* $q(D) = D^2 + b\, D + c\, I$. *Entonces,* $q(D)$ *es suprayectivo y* $\dim(\ker q(D)) = 2$.

Demostración. Sea $q(z) = z^2 + b\, z + c$. Dado que q es irreducible sólo tiene raíces complejas. Esto es, existen números reales α y β tales que $\beta \neq 0$ y $q(\alpha \pm \beta\, i) = 0$. Por tanto, el polinomio puede escribirse como

$$q(z) = (z - (\alpha + \beta\, i))(z - (\alpha - \beta\, i)) = (z - \alpha)^2 + \beta^2$$

y tenemos que $q(D) = (D - \alpha I)^2 + \beta^2 I$.

Tomemos $w(t) \in \ker(q(D + \alpha I))$, de manera que se cumpla

$$\ddot{w} + \beta^2 w = 0.$$

Sean

$$\begin{aligned} u(t) &= (\cos\beta t) w - \frac{1}{\beta}(\sin\beta t)\dot{w}, \\ v(t) &= \beta(\sin\beta t) w + (\cos\beta t)\dot{w}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Derivando y simplificando, obtenemos que $\dot{u} \equiv 0$ y $\dot{v} \equiv 0$. Por lo tanto, existen constantes C_1 y C_2 en $\mathbb{R}$ tales que

$$(\cos \beta t) w - \frac{1}{\beta}(\sin \beta t)\dot{w} = C_1,$$
$$\beta(\sin \beta t) w + (\cos \beta t)\dot{w} = C_2.$$

Resolviendo, obtenemos que

$$w(t) = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t.$$

El lema 4.1 implica que los elementos de $\ker q(D)$ son de la forma

$$x_h(t) = e^{\alpha t} w(t) = e^{\alpha t}\left(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t\right).$$

De este modo, concluimos que el conjunto $\{e^{\alpha t}\cos(\beta t),\, e^{\alpha t}\sin(\beta t)\}$ es una base de $\ker(q(D))$.

Para demostrar la suprayectividad, tomemos $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En base a y definimos

$$x_p(t) = \frac{1}{\beta} e^{\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha s} \sin \beta(t-s)\, y(s)\, ds. \tag{4.2}$$

Puede verificarse directamente que x_p satisface $q(D)(x_p) = y$.

La idea heurísitca detrás de esta expresión para $x_p(t)$ es la siguiente. Queremos encontrar una solución particular x_p. Sea $w(t) = e^{-\alpha t} x_p(t)$. Definamos funciones $u(t)$ y $v(t)$ como en (4.1). Al derivar y simplificar se obtiene que

$$\dot{u} = -\frac{1}{\beta}(\sin \beta t)\left(e^{-\alpha t} y(t)\right),$$
$$\dot{v} = \frac{1}{\beta}(\cos \beta t)\left(e^{-\alpha t} y(t)\right).$$

Además, se tiene que

$$w(t) = (\cos \beta t)\, u(t) + (\sin \beta t)\, v(t). \tag{4.3}$$

Suponiendo que $u(0) = 0 = v(0)$, llegamos a:

$$u(t) = -\int_0^t \frac{1}{\beta}(\sin \beta s)\left(e^{-\alpha s} y(s)\right) ds, \tag{4.4}$$
$$v(t) = \int_0^t \frac{1}{\beta}(\cos \beta s)\left(e^{-\alpha s} y(s)\right) ds.$$

De este modo, sustituyendo (4.4) en (4.3), se obtiene la fórmula (4.2). Esto termina la demostración. $\square$

Referencias

[1] Lomelí, H. E. y B. Rumbos, 2010. *Métodos Dinámicos en Economía*. JIT press, 2ª edición.

†Departamento de Matemáticas, Instituto Tecnológico Autónomo de México, México, DF 01000