Miscelánea Matemática **35** (2002) 65–75 SMM

Algunas interpretaciones económicas del factor de integración

Héctor Lomelí y Beatriz Rumbos
Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM)
Río Hondo #1
Tizapán, San Angel
01000 México D.F.
México
rumbos@itam.mx

Resumen

El factor de integración se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden. Describimos cómo puede usarse un modelo de inversión para motivar la solución de la ecuación lineal. Para ello introducimos e interpretamos varios conceptos que se usan comúnmente en economía y finanzas.

1. Introducción.

Un tema estudiado en la mayoría de cursos de ecuaciones diferenciales es el de cómo resolver una ecuación lineal de la forma

$$\dot{x} = r(t)x + q(t). \tag{1}$$

El método usualmente propuesto consiste en multiplicar por un factor de integración de la forma

$$\rho(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} r(s)ds},$$

de tal modo que la ecuación se transforma en

$$\frac{d}{dt}\left(\rho(t)x(t)\right) = \rho(t)q(t).$$

Desgraciadamente, en la mayoría de los textos [1] no se explica de dónde surge este factor integrante, fuera de una motivación puramente formal.

Es cada vez más frecuente que alumnos de economía y ciencias afines estudien ecuaciones diferenciales. Existen algunos libros que intentan explicar ecuaciones diferenciales desde el punto de vista de temas económicos (ver por ejemplo[5], [6]). El problema para el profesor de matemáticas es que, en muchos casos, desconoce los modelos económicos con los que puede motivarse el estudio de las ecuaciones. De nuestra experiencia en diversos cursos de licenciatura hemos encontrado que existe una gran variedad de modelos suficientemente simples para un nivel introductorio. Nos proponemos en este artículo describir uno de ellos, explicando cómo puede usarse un modelo de inversión para motivar la ecuación lineal.

La ecuación lineal (1) tiene una interpretación natural relacionada con el valor de una inversión al tiempo t. Existen versiones mucho más elaboradas del modelo que vamos a proponer que incorporan el factor incertidumbre. Estos modelos utilizan ecuaciones diferenciales estocásticas y remitimos al lector a [7], [8], [9], [10] o [11] para mayor información.

Recordemos que un bono es un contrato en el cual el emisor se compromete a realizar pagos futuros al beneficiario o dueño del bono. Los pagos se realizan cuando ocurren ciertos eventos o fechas, previamente especificados en el contrato. El término “bono” proviene del inglés *bond*. Su significado como contrato data del medievo, cuando se aseguraban los bienes de un individuo hasta que éste cumpliera con ciertas condiciones, como el pago de impuestos. De manera similar, los individuos podían salir de la cárcel bajo un contrato que los obligara a aparecer en los tribunales para ser juzgados.

Los bonos públicos aparecieron por primera vez en Florencia en el año de 1345 (ver [12]) y son contratos emitidos por los gobiernos. La compra de un bono gubernamental equivale a prestar al gobierno, bajo ciertas condiciones de pago, la cantidad de dinero especificada en el bono. Hoy en día, distintas entidades públicas y privadas emiten bonos para financiar sus actividades; en particular, los gobiernos emiten diversos bonos. (En México los más comunes son los **Cetes** o Certificados de la Tesorería.)

Es tal la importancia de los bonos, que su valor es considerado como la variable fundamental en finanzas. Para el lector interesado en el análisis básico de bonos recomendamos la obra clásica [13].

[1]Entre los más usados tenemos, por ejemplo [1], [2], [3] y [4].

2. Definiciones y propiedades básicas.

Una propiedad que caracteriza a los bonos es que en todo momento se conoce su valor final. Digamos que tenemos un periodo de tiempo $[0, T]$ y al final de éste el bono vale B_T; sin embargo, no necesariamente se conoce el valor del bono en instantes intermedios. A continuación obtendremos este valor.

En principio, el valor del bono al tiempo t, denotado por $B(t)$, depende del mercado, es decir, el intercambio de bonos entre los participantes en el mercado determina el precio $B(t)$ para todo $t \in [0, T]$. Para analizar este precio, un concepto crucial es el de rendimiento o tasa de interés.

Definición 1. Sea $B(t)$ el precio de un bono al tiempo t. El **rendimiento** del bono en el periodo de tiempo $[t, s]$ se define como

$$\gamma(t, s) = \frac{1}{s-t}\left[\frac{B(s) - B(t)}{B(t)}\right]$$

donde $t < s$, es decir, es el porcentaje de cambio en el valor del bono en el período $[t, s]$. El **rendimiento instantáneo** al tiempo t, $r(t)$, es el límite de los rendimientos cuando $s \to t^+$; esto es,

$$\begin{aligned} r(t) &= \lim_{s\to t^+} \gamma(t, s) \\ &= \lim_{s\to t^+} \frac{1}{B(t)}\left[\frac{B(s) - B(t)}{s-t}\right] \\ &= \frac{1}{B(t)}\frac{dB(t)}{dt} = \frac{\dot{B}(t)}{B(t)}, \end{aligned}$$

en donde $\dot{B} = \frac{dB}{dt}$. La función $r(t)$ también es llamada **tasa instantánea**, la cual representa la tasa porcentual de cambio (instantáneo) en el valor del bono en el "instante" t.

Notemos que B satisface la siguiente ecuación diferencial lineal:

$$\dot{B}(t) - r(t)B(t) = 0.$$

Procedamos ahora a resolverla dada la condición final $B(T) = B_T$.

Reescribimos la ecuación como

$$\frac{\dot{B}(t)}{B(t)} = r(t).$$

Integramos entre T y t y tomamos el logaritmo para obtener

$$B(t) = B_T \left(e^{\int_T^t r(s)ds}\right) = B_T \left(e^{-\int_t^T r(s)ds}\right). \tag{2}$$

Los límites de integración se invierten puesto que $t < T$ y de esta forma el resultado queda expresado como "el valor presente (en t) de B_T".

De este modo, se ha demostrado que existe una función

$$\beta(t) = e^{\int_T^t r(s)ds} = e^{-\int_t^T r(s)ds} \tag{3}$$

tal que el valor del bono al tiempo t es $B(t) = \beta(t)B_T$. Nótese que si la función $r(t)$ es positiva, entonces $\beta(t)$ es una función creciente. La función $\beta(t)$ es llamada el **factor de descuento** del bono con tasa de descuento $r(t)$, y claramente tiene que satisfacer $\beta(T) = 1$. El caso más simple se presenta cuando $r(t) \equiv r$, donde r es una constante, ya que entonces se tiene $B(t) = B_T\, e^{-r(T-t)}$ y por lo tanto el factor descuento es $\beta(t) = e^{-r(T-t)}$.

La fórmula (2) permite varias interpretaciones. En primer lugar, vemos que el valor del bono al tiempo t depende esencialmente de los rendimientos en el intervalo $[t, T]$, es decir, el valor actual es el valor futuro descontado mediante los rendimientos del periodo. Además, la relación entre el valor actual y el final es lineal. En otras palabras, si se duplica el precio B_T, necesariamente se duplicará $B(t)$. Puede decirse que en este caso la ecuación diferencial se resuelve "hacia atrás" ya que se obtiene el valor presente del bono a partir de un valor futuro conocido. La otra posibilidad es resolver "hacia adelante", es decir, el valor actual queda expresado en términos de un valor conocido en el pasado, que normalmente es el valor inicial.

Por otro lado, si tenemos dos bonos, $B_1(t)$ y $B_2(t)$, con tasas $r_1(t)$ y $r_2(t)$ tales que $r_1(t) > r_2(t)$ y mismo valor final $B_1(T) = B_2(T) = B_T$, entonces los precios de los bonos satisfacen $B_1(t) < B_2(t)$ para todo $t < T$. Esto puede verificarse de la siguiente manera: dado que $r_1(t) > r_2(t)$, se sabe que

$$\begin{gathered} \int_t^T r_1(s)\,ds > \int_t^T r_2(s)\,ds, \\ -\int_t^T r_1(s)\,ds < -\int_t^T r_2(s)\,ds, \\ e^{-\int_t^T r_1(s)\,ds} < e^{-\int_t^T r_2(s)\,ds}, \end{gathered}$$

y al multiplicar por B_T nos queda

$$B_T \left(e^{-\int_t^T r_1(s)\,ds}\right) < B_T \left(e^{-\int_t^T r_2(s)\,ds}\right),$$

es decir, $B_1(t) < B_2(t)$.

3. Interpretación de las ecuaciones lineales.

El modelo de la sección anterior puede mejorarse. Podríamos considerar, por ejemplo, que a lo largo del periodo de vida del bono se efectúan varios depósitos o retiros. Sea $Y(t)$ el valor de la inversión en bonos al tiempo t. Para simplificar los cálculos, escribiremos Y en términos del valor de un bono fijo $B(t)$,

$$Y(t) = Z(t)B(t). \tag{4}$$

La variable $Z(t)$ representa el número de bonos que se tienen en la inversión. A la cantidad $Z(t)$ se la conoce, en ocasiones, como la **posición** y en principio puede ser positiva o negativa (una posición es negativa cuando se debe dinero). Suponemos que el cambio en la cantidad $Z(t)$ está dado por

$$\dot{Z}(t) = \delta(t), \tag{5}$$

donde $\delta(t)$ es una función que representa la compra o venta de bonos.

Nos proponemos ahora encontrar una ecuación que sea satisfecha por Y, para después proceder a resolverla. De las ecuaciones (4) y (5) obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{Y}(t) &= Z(t)\dot{B}(t) + \dot{Z}(t)B(t)\\ &= r(t)Z(t)B(t) + \delta(t)B(t).\end{aligned}$$

Nótese que la ecuación anterior dice que el cambio en el valor de una inversión proviene de dos fuentes: del cambio en el valor de un bono y del cambio en la posición. De este modo, concluimos que el valor de la inversión puede modelarse con la siguiente ecuación:

$$\dot{Y}(t) - r(t)Y(t) = \delta(t)B(t), \tag{6}$$

donde $Y(T) = Y_T$. Nótese que la anterior es una ecuación diferencial lineal no autónoma y no homogénea que puede resolverse multiplicando por el factor de integración $\rho_T(t) = e^{-\int_T^t r(s)ds}$. De esta forma,

$$(\dot{Y}(t) - r(t)Y(t))e^{-\int_T^t r(s)ds} = \frac{d}{dt}(Y(t)e^{-\int_T^t r(s)ds}) = \delta(t)B(t)e^{-\int_T^t r(s)ds}.$$

Recordando que $B(t) = B_T\left(e^{-\int_t^T r(s)ds}\right)$, la solución de (6) está dada por

$$Y(t) = \left(\frac{Y_T}{B_T} + \int_T^t \delta(s)\, ds\right) B(t). \tag{7}$$

Otra manera de interpretar la ecuación (6) es en términos de tasas. Para ello, se dividen ambos lados por $Y(t)$ y reescribiendo $\dfrac{\delta(t)B(t)}{Y(t)}$ como $\dfrac{\dot{Z}}{Z}$ se tiene

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = r(t) + \frac{\dot{Z}}{Z}, \tag{8}$$

es decir, la tasa de rendimiento de la inversión Y es igual a la tasa de rendimiento $r(t)$ de los bonos más la tasa de depósitos o retiros (compras o ventas) $\dfrac{\dot{Z}}{Z}$. Vale la pena mencionar que para el inversionista en bonos, la tasa $r(t)$ está dada por el mercado (es un parámetro exógeno) y que sólo tiene control sobre $\delta(t)$, el cambio en la posición.

Una observación crucial es que el factor de integración es precisamente el inverso multiplicativo del factor de descuento (3). Puede suponerse, sin pérdida de generalidad, que $B_T = 1$; por lo que $B(t) = \beta(t)$. De este modo, el factor de descuento es un factor de integración y cumple la relación

$$\rho_T(t) = \beta(t)^{-1}. \tag{9}$$

Por lo tanto, al multiplicar por el factor de integración en realidad lo que se hace es obtener una ecuación para la posición $Z(t)$; esto es

$$\dot{Z}(t) = \frac{d}{dt}\left(\beta(t)^{-1}Y(t)\right) = \delta(t). \tag{10}$$

Al integrar se obtiene la ecuación (7).

4. Factores de descuento generalizados.

La ecuación (10) puede verse de otra manera. Observemos que, de la ecuación (3), podemos considerar a $\beta(t)$ como una función en dos variables t y T. Además, si fijamos t, la expresión $\beta(t)^{-1}Y(t)$ representa el valor futuro (al tiempo T) de la inversión en bonos. La ecuación (10) dice, por lo tanto, que si queremos que el valor de la inversión $Y(t)$ esté fijo de antemano, entonces lo que debemos hacer es comprar o vender bonos hoy (en t) a manera de compensar los cambios en el valor futuro de la inversión.

Como hemos visto, el factor de descuento en realidad depende de dos variables. Definimos, por ende, el factor de descuento generalizado como

$$\eta(t,t') = e^{-\int_t^{t'} r(s)ds}.$$

La función η tiene dos posibles interpretaciones: la primera, si $t < t'$, como el factor de descuento al tiempo t de un bono con plazo t' y la segunda, si $t > t'$, como el valor futuro, en t, de una inversión que al tiempo t' vale 1. En los mercados financieros existen, de hecho, instrumentos que reproducen este factor de descuento que dependen de dos tiempos. Estos son los llamados contratos *forward* y se remite al lector interesado a [11] o [13] para mayor información acerca de este tipo de instrumento.

Queremos insistir en que el factor de descuento generalizado satisface la siguiente ecuación

$$\eta(t,t'') = \eta(t,t')\,\eta(t',t''). \tag{11}$$

La ecuación (11) es conocida como la estructura a plazos del mercado de bonos. Se invita al lector a pensar en por qué debe ser cierta de forma intuitiva.

Nótese que todo factor de integración es necesariamente de la forma

$$\rho(t) = A\,\eta(t_0,t),$$

donde A y t_0 son constantes. En particular, bajo esta perspectiva, la ecuación (9) se explica de la siguiente manera

$$\rho_T(t) = \beta(t)^{-1} = \eta(t,T)^{-1} = \eta(0,T)^{-1}\eta(0,t).$$

Con esta interpretación del factor de integración, la solución de la ecuación lineal (1) puede interpretarse como sigue: primero se multiplica por un factor de descuento $\eta(t_0,t)$ para que todos los términos de la ecuación queden expresados en unidades de un tiempo fijo t_0 y segundo, integramos en el periodo de tiempo de interés para el problema. Nótese que esta integración tiene sentido ya que todos los términos están medidos en las mismas unidades (digamos pesos del año t_0) y son comparables.

5. Horizontes infinitos y burbujas especulativas.

Supongamos ahora que una inversión no tiene tiempo terminal. Sea $Y(t)$ el valor de una inversión con dividendos $X(t)$ en cada periodo y sea $r(t)$ la tasa de una inversión alternativa, siempre disponible, por ejemplo la inversión en algún bono gubernamental fijo. En ausencia de costos de transacción, si la inversión y el bono coexisten en todo momento ambos deben ofrecer ganancias (o pérdidas) idénticas, es decir, debe cumplirse

$$r(t)Y(t) = X(t) + \dot{Y}(t). \tag{12}$$

Esta ecuación dice lo siguiente: en cada instante de tiempo es equivalente invertir la cantidad Y en bonos, obteniendo rY, o bien conservar la inversión obteniendo dividendos X más el cambio en el valor de la inversión $\dot{Y}$ (o ganancias de capital). Pensemos, por ejemplo, que Y es el valor de una casa que se renta en una cantidad X. En cada momento, la renta del inmueble más el cambio en el valor del mismo, debe ser igual a comprar bonos con un rendimiento r por una cantidad igual a la que se obtendría con la venta del inmueble. Si tuviésemos que $rY < X + \dot{Y}$, entonces los bonos no existirían ya que la inversión en el inmueble ofrece mayores rendimientos. Análogamente si $rY > X + \dot{Y}$, nadie (al menos nadie "racional") compraría el inmueble con fines de inversión pues la inversión en bonos es superior. Decimos que la inversión es a **perpetuidad**, si se mantiene (o se espera mantener) durante un horizonte de tiempo infinito.

La ecuación (12) es, una vez más, una ecuación diferencial lineal de primer orden. Conocemos la trayectoria de los dividendos $X(t)$ (o al menos creemos conocerla) y la tasa $r(t)$; sin embargo, dado que la inversión es a perpetuidad, no tenemos a mano ningún valor final para ésta. Para resolver la ecuación (12) multiplicamos por el factor de integración $\rho(s) = e^{-\int_0^s r(\tau)d\tau} = \eta(0,s)$ para obtener

$$-\frac{d}{ds}\left(Y(s)\rho(s)\right) = X(s)\rho(s).$$

Integrando en el intervalo $[t,\infty)$, tenemos

$$Y(t)\rho(t) - \lim_{s\to\infty} \rho(s)Y(s) = \int_t^\infty X(s)\rho(s)ds.$$

De esta última expresión concluimos que el valor de la inversión (en caso de estar definido) en t es

$$Y(t)\rho(t) = \lim_{s\to\infty} \rho(s)Y(s) + \int_t^\infty X(s)\rho(s)ds. \tag{13}$$

Notemos que $Y(t)\rho(t)$ es igual al valor de la inversión en t, descontado al tiempo inicial $t = 0$. En particular, el valor inicial de la inversión es

$$Y(0) = \lim_{s\to\infty} \rho(s)Y(s) + \int_0^\infty X(s)\rho(s)ds.$$

Observemos que el término $\int_0^\infty X(s)\rho(s)ds$ representa el valor presente de todos los dividendos acumulados, conocido como el **valor fundamental** de la inversión. El factor de descuento coincide con el factor de integración $\rho(s)$ de manera que la tasa de descuento es $r(t)$. El término $\lim_{s\to\infty} \rho(s)Y(s)$ es conocido como **burbuja especulativa.** Si $\lim_{s\to\infty} \rho(s)Y(s) \neq 0$, el valor de la inversión hoy (en $t = 0$) puede ser mayor o menor que el valor presente de los dividendos acumulados. Por ejemplo, la inversión podría tener un valor positivo $Y(0) > 0$ a pesar de tener dividendos nulos para todo t. Este fenómeno estaría ocasionado por una burbuja especulativa mediante la cual esperamos que el precio de la inversión aumente en el futuro. Las burbujas especulativas suelen existir para inversiones cuya parte fundamental es difícil de determinar, por ejemplo inversiones en compañías novedosas (un caso reciente es el de las llamadas *compañías dotcom*), en mercados emergentes, en obras de arte, etc.

La condición usual

$$Y(0) = \int_0^\infty X(s)\rho(s)ds$$

no admite burbujas especulativas; no obstante, para que el valor inicial de la inversión esté definido, la integral impropia que representa el valor presente de los dividendos acumulados debe converger. Si tal es el caso, entonces se cumple

$$\begin{aligned} Y(t) &= \int_t^\infty X(s)\rho(s)\rho(t)^{-1}ds \\ &= \int_t^\infty X(s)\eta(t,s)ds \end{aligned}$$

Esto es, si no existen burbujas especulativas, no las habrá para ningún tiempo t y además, la inversión en cada instante será el valor descontado de todos los dividendos acumulados.

Un requerimiento común para que esto se satisfaga es el asumir que la tasa es fija y que $|X(t)| < M$ para algún $M > 0$, es decir, que la función de dividendos esté acotada. Esta condición es bastante natural ya que difícilmente podemos imaginar que no exista una cota para los dividendos.

El procedimiento utilizado para determinar el valor inicial de la inversión puede describirse como sigue: la ecuación (12) representa la igualdad de dos flujos alternativos de inversión para todo t. Como primer paso descontamos estos flujos al tiempo inicial $t = 0$ utilizando el factor de descuento $\eta(0, s)$. Así, todos los flujos están medidos en las mismas unidades, digamos pesos del año 0. Segundo, consideramos todo el acervo de inversión acumulado a perpetuidad a partir del tiempo t, es decir, integramos en el intervalo $[t, \infty)$. Finalmente, obtenemos la ecuación (13) que nos dice que el valor de la inversión en t (expresado en pesos del año 0) es igual a una burbuja especulativa más el valor presente de los rendimientos acumulados.

6. Conclusión.

El estudio de las ecuaciones diferenciales tiene su origen en fenómenos físicos. La mayor parte de los textos sobre el tema ofrece, aparte de las justificaciones formales de los métodos de solución, algún ejemplo físico que ilustra el método de forma intuitiva. Así, por ejemplo, cada vez que pensamos en una ecuación lineal de segundo orden con raíces complejas, visualizamos el clásico oscilador armónico.

Hoy en día, los métodos dinámicos han trascendido a las ciencias exactas y se han convertido en una herramienta indispensable dentro de algunas ciencias sociales, siendo la economía la principal usuaria. Sin embargo, salvo contadas excepciones, los textos de ecuaciones diferenciales no han incorporado los ejemplos económicos como auxiliares en la justificación de algunos conceptos formales. Esta nota pretende ser un avance en esta dirección y es sólo una muestra de algunos ejemplos sencillos. Creemos que los textos futuros deben incluir este tipo de ilustraciones con mayor frecuencia ya que el mundo económico es tan real e importante como el mundo físico.

Referencias

[1] M. Braun. *Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones.* Grupo Editorial Iberoamérica, 1990.

[2] C. Edwards and D. Penney. *Ecuaciones Diferenciales.* Pearson, 2 edition, 2001.

[3] K. Nagle, E. Saff, and A. Snider. *Ecuaciones diferenciales.* Pearson, 2001.

[4] P. Blanchard, R. Devaney, and G. Hall. *Ecuaciones diferenciales.* Thomson, 1999.

[5] R. Shone. *Economic Dynamics.* Cambridge University Press, 1997.

[6] M. Klein. *Mathematical Methods for Economics.* Addison-Wesley, 1998.

[7] David Heath, Robert Jarrow, and Andrew Morton. Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica*, 60(1):77–105, 1992.

[8] Jonathan E. Ingersoll. Interest rates. In J. Eatwell, M. Milgate, and P. Newman, editors, *Finance*, pages 172–179. W. W. Norton and Co., New York, NY, 1989.

[9] John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll, and Stephen A. Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53(2):385–407, 1985.

[10] J. Michael Steele. *Stochastic Calculus and Financial Applications.* Springer Verlag, 2000.

[11] M. Baxter and A. Rennie. *Financial Calculus.* Cambridge University Press, 1996.

[12] Donald D. Hester. Bonds. In J. Eatwell, M. Milgate, and P. Newman, editors, *Money*, pages 56–59. W. W. Norton and Co., New York, NY, 1989.

[13] Frank J. Fabozzi. *Bond Markets: Analysis and Strategies.* Prentice Hall, 4 edition, 1999.