

LA PARADOJA DE EULER

HÉCTOR LOMELÍ Y BEATRIZ RUMBOS†

RESUMEN. En esta nota presentamos una semblanza general de la historia del cálculo en variaciones así como algunas dificultades que pueden surgir al utilizar las condiciones de Euler-Lagrange para resolver problemas de optimización en espacios de funciones. Para este fin, proporcionamos algunos ejemplos conocidos por Euler y Weierstrass en los que surgen aparentes contradicciones. Mostramos con esto que las ecuaciones de Euler-Lagrange no son suficientes para resolver de manera general los problemas del cálculo en variaciones.

1. INTRODUCCIÓN

Con frecuencia, los problemas aplicados pueden plantearse en términos matemáticos modernos mediante el siguiente esquema general para encontrar valores extremos:

Dado un conjunto Q y una función $J : Q \rightarrow \mathbb{R}$, encontrar -si existen- aquellos elementos a en Q tales que $J(a)$ es un mínimo o máximo global.

En general, este problema puede no tener solución y la elección del dominio Q se convierte en una dificultad esencial. El desarrollo histórico del cálculo, del análisis matemático y gran parte de las teorías matemáticas modernas tocan, en cierto modo, esta problemática.

En 1684 el gran matemático alemán Gottfried W. Leibniz (1646-1716) propuso una técnica (*Nova methodus pro maximis et minimis*) para resolver una extensa familia de problemas de este tipo. Se trataba, nada más y nada menos, de uno de los orígenes del cálculo diferencial e integral. Una limitante de este método era que el conjunto Q estaba restringido a ser un subconjunto de algún espacio vectorial real de dimensión finita, por ejemplo \mathbb{R}^n .

En forma paralela en Inglaterra, Isaac Newton (1643-1727) desarrolló una teoría equivalente a la de Leibniz. En su excelsa obra *Philosophia naturalis principia mathematica* (1685) incursionó aún más allá de la temática propia del cálculo diferencial e integral, exponiendo y resolviendo correctamente una variante del siguiente problema:

Encontrar la forma de un cuerpo sólido de revolución de manera que al moverse a través de un fluido su resistencia sea mínima.

Como ejemplo de lo anterior podemos imaginar que el propósito de este planteamiento era encontrar la forma óptima de un proyectil. Newton expuso [2] la solución correcta; sin embargo, nunca especificó el método que había utilizado para encontrarla.

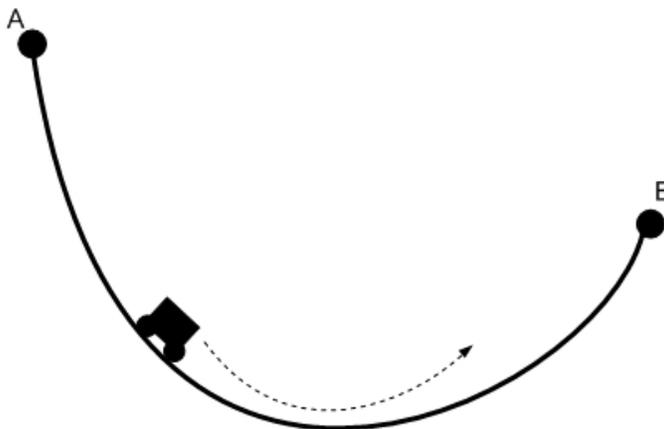
El problema del proyectil de mínima resistencia pertenece, en esencia, al esquema general para encontrar valores extremos propuesto al principio de este texto. En este caso, el conjunto

Q consiste de todas las formas posibles que puede tener un sólido de revolución y el número real asociado mediante la función J es la resistencia. Notemos que ahora el conjunto Q es un subconjunto de un espacio de funciones, mismo que constituye un espacio vectorial de dimensión infinita. Aunque la estructura de espacio vectorial se conserva, estos conjuntos de funciones poseen una estructura mucho más compleja que los subconjuntos de \mathbb{R}^n . Los problemas en relación a la búsqueda de valores extremos en espacios de funciones son denominados, en general, problemas variacionales.

Si Q es un conjunto de funciones, a la función $J : Q \rightarrow \mathbb{R}$ se la llamará funcional. Es decir, los funcionales son funciones de valores reales cuyos dominios son, a su vez, conjuntos de funciones.

2. LA BRAQUISTÓCRONA

Imaginemos que vamos a diseñar un tramo para una *montaña rusa* en la cual el carrito debe ir del punto A al B , como se muestra en la siguiente figura:



Para lograr que los usuarios generen la cantidad máxima de adrenalina, debemos elegir la trayectoria a seguir de tal forma que el carrito recorra este tramo en el menor tiempo posible. A manera de simplificación, suponemos que no existe fricción alguna y que el vehículo está únicamente sujeto a la fuerza de la gravedad.

Orientamos al eje vertical hacia abajo y denotamos a la curva desconocida por $y(x)$. Sin pérdida de generalidad, podemos tomar el punto A en el origen, de manera que $y(0) = 0$, y el otro punto lo expresamos como $B = (x^*, y(x^*))$. La energía cinética del carrito en cada punto de la trayectoria, denotada por K , depende tanto de su masa m como de su velocidad v y está dada por la expresión:

$$K = \frac{1}{2}mv^2.$$

Asimismo, su energía potencial, denotada por U , depende de su masa y de la altura y a la que se encuentre; en este caso, dado que la dirección positiva es hacia abajo tenemos que

$$U = -mgy,$$

donde g es la aceleración de la gravedad¹. La ley de conservación de la energía implica que $K + U = 0$ de manera que,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy$$

y por lo tanto,

$$(2.1) \quad v = \sqrt{2yg}.$$

Deseamos encontrar la trayectoria que minimice el tiempo total de traslado, es decir, queremos resolver el siguiente problema: encontrar la curva $y(x)$ que minimice el tiempo total T de recorrido. Las restricciones sobre la curva implican que $y(0) = 0$ y $y^* = y(x^*)$ son valores fijos. Además, si $x(t)$ es la posición horizontal del carrito al tiempo t , entonces la posición vertical es $y(x(t))$.

La velocidad en cada punto de la trayectoria es

$$(2.2) \quad v = \frac{ds}{dt},$$

en donde s representa la longitud de arco de la curva que, en este caso, satisface la siguiente ecuación

$$(2.3) \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{1 + (y'(x))^2} \frac{dx}{dt}.$$

Utilizando (2.1), (2.2) y (2.3), se encuentra que el tiempo total de recorrido es una función $J[y]$ dependiente de la forma de la curva $y(x)$. Para resolver el problema, empleamos a x como nueva variable independiente, con $x(0) = 0$ y $x(T) = x^*$. Por lo tanto, si S es la distancia total a lo largo de la curva que se recorre en el tiempo T tenemos que:

$$T = J[y] = \int_0^T dt = \int_0^S \frac{ds}{v} = \int_0^{x^*} \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2gy}} dx.$$

De este modo, el problema equivale a minimizar $J[y]$, en donde y pertenece al conjunto Q de todas las funciones de clase \mathcal{C}^2 que satisfacen $y(0) = 0$ y $y(x^*) = y^*$.

El problema anterior fue planteado por primera vez durante el verano de 1696 y dado a conocer formalmente en enero de 1697 por Johann Bernoulli (1667-1748), como un reto a los grandes matemáticos de la época [9, 11, 14]. Dicho reto era parte del “acertijo del año” que se acostumbraba a proporcionar en aquella época. El documento para iniciar aquel año de 1697 comenzaba así:

¹En realidad, la aceleración de la gravedad no es una constante de la naturaleza. Su valor cambia según el lugar de la Tierra en donde se mida. Para efectos prácticos se utiliza el valor $g = 9.81m/s^2$.

“A los matemáticos más distinguidos que destacan alrededor del mundo, saludos de Johann Bernoulli, profesor de matemáticas...”

Posteriormente conminaba a los interesados a resolver el siguiente problema:

“Determinar la línea curva que une dos puntos dados, situados a distancias diferentes de la horizontal y no en la misma línea vertical, a lo largo de la cual un cuerpo móvil, cayendo por su propio peso y comenzando a moverse en el punto más alto, descenderá de manera más rápida al punto más bajo.”

Johann Bernoulli bautizó a este acertijo como el problema de la braquistócrona, por las palabras griegas *brachistos* (más corto) y *chronos* (tiempo), ya que se requería encontrar la trayectoria de tiempo de descenso mínimo para un cuerpo sujeto a la fuerza de la gravedad. Es evidente que nuestra pregunta acerca de la trayectoria a seguir por el carrito de montaña rusa es equivalente al reto matemático que presentó Johann Bernoulli siglos atrás.

El problema de la braquistócrona había sido considerado anteriormente por Galileo (1564-1642) en 1638 quien descubrió inicialmente, que la trayectoria recta de tiempo mínimo de un punto A a una recta L era la recta AB que formaba un ángulo de 45° con la línea L . Posteriormente, encontró que el tiempo de descenso era menor a lo largo del arco de circunferencia que se muestra en la figura 1, lo cual era correcto; sin embargo, se equivocó al aseverar que esta era la trayectoria de tiempo de descenso mínimo.

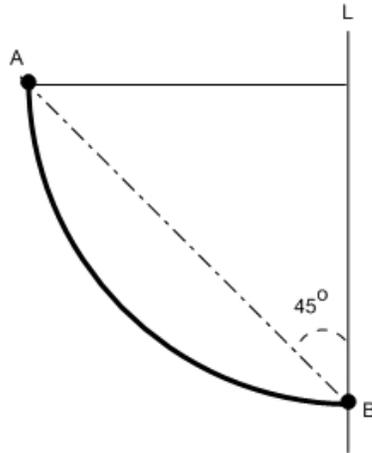


FIGURA 1. Solución de Galileo que utiliza un arco de círculo.

Además del mismo Johann Bernoulli, otros cuatro matemáticos encontraron una solución correcta al problema de la braquistócrona en 1697. Éstos fueron: Jacob Bernoulli –hermano de Johann–, Leibniz, Newton y L’Hôpital. Todos ellos descubrieron que la curva de descenso mínimo es una cicloide, conocida desde entonces como la braquistócrona.

Un aspecto fundamental que queremos recalcar, es el hecho de que implícitamente el problema anterior asume que las curvas a considerar (o el conjunto Q del dominio del funcional

J) son continuamente diferenciables dos veces - equivalentemente, de clase \mathcal{C}^2 en su dominio-. En el caso de la braquistócrona, el mínimo del funcional satisface esta suposición. Pero, como se verá posteriormente, un funcional puede no tener un mínimo sobre un conjunto previamente especificado. Como consecuencia, es frecuente que los extremos de los funcionales sean funciones que no son suaves o, peor aún, ni siquiera continuas.

3. CÁLCULO EN VARIACIONES

El alumno más destacado de Johann Bernoulli fue el gran matemático Leonard Euler (1667-1748) quien en 1744 escribió *Methodus Inveniendi*, considerado el primer tratado sobre el cálculo en variaciones. En él se expone una metodología para resolver problemas variacionales similares al de la braquistócrona. Hasta este punto en la historia, no existía una técnica general para resolver este tipo de cuestiones y la solución dependía de las características de cada problema variacional a considerar.

Como base de su método, Euler postuló un principio de eficiencia en la naturaleza, mismo que tuvo enormes repercusiones en el desarrollo posterior de las ciencias. La esencia de dicho concepto aparece por primera vez en la siguiente frase célebre:

“En efecto, puesto que la arquitectura del mundo universo es perfectísima, y además hecha por el más sabio Creador, nada en verdad ocurrirá en el mundo en donde alguna regla de máximo o mínimo no salga a relucir de alguna forma.”²

En otras palabras, de acuerdo con Euler, la naturaleza había sido creada de tal manera que ésta siempre buscase ser lo más eficaz posible –la distancia más corta, la energía mínima, el punto más estable– y las leyes de la física resultasen ser simples formulaciones de este principio. El primero en darse cuenta de este fenómeno fue Herón de Alejandría, quien postuló la ley de reflexión de los rayos de luz haciendo notar que la luz siempre sigue el camino más corto. Mencionaremos más detalles de las ideas de Herón en la sección 4.

De acuerdo a este tipo de principio de eficiencia, la naturaleza resuelve incesantemente problemas variacionales. Euler comenzó a emplear consideraciones geométricas, similares a las del cálculo diferencial e integral, para encontrar un método general de solución; sin embargo, su razonamiento se fundamentaba más en la intuición que en la formalidad como se muestra a continuación.

Dada alguna función “suave” L , deseamos encontrar la trayectoria $y(x)$ que minimiza, o alternativamente maximiza, la siguiente integral:

$$\int_a^b L(y'(x), y(x), x) dx,$$

con (a) y (b) dados.

²En el original [3] de 1744: “*Cum enim Mundi universi fabrica sit perfectissima atque a Creatore sapientissimo absoluta, nihil omnino in mundo contingit, in quo non maximi minime ratio quaequam eluceat*”. Traducción de Mauricio López Noriega.

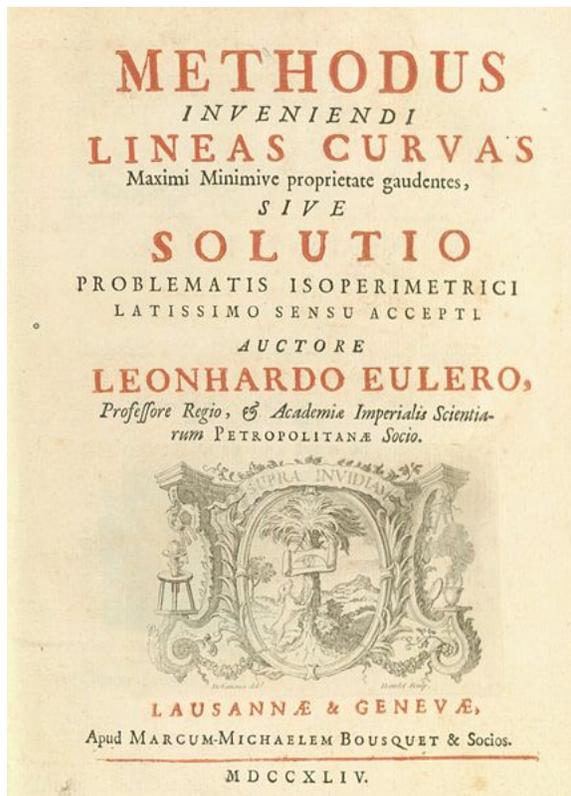


FIGURA 2. Portada original del *Methodus Inveniendi* de 1744.

Para resolver este problema, Euler suponía que si existía una función solución $y(x)$, ésta podría graficarse. Posteriormente, partía el dominio en $n + 1$ subintervalos de longitud Δx . Esto es, si el dominio de y era $[a, b]$, entonces la partición resultante estaba dada por:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b.$$

La idea era elegir, de la mejor manera posible, el valor de y en los elementos x_i de la partición. Si para cada i , $y_i \equiv y(x_i)$, los valores y_0 y y_{n+1} están fijos desde un principio y, por tanto, deben ajustarse los valores y_1, \dots, y_n .

Para este efecto, Euler aproximaba a la derivada y' en cada uno de los subintervalos por la pendiente de la secante correspondiente; es decir,

$$y'(x_i) \simeq \frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{\Delta x} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} = y'_i.$$

Así, la integral original se estimaba con la suma

$$(3.1) \quad S(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n+1} L \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}, y_i, x_i \right) \Delta x,$$

cuyo valor extremo se obtenía resolviendo:

$$\nabla S(y_1, \dots, y_n) = 0.$$

Derivando en (3.1), se cumplía la condición de optimalidad

$$\frac{\partial S}{\partial y_i} = \frac{\partial L}{\partial y'}(y'_i, y_i, x_i) - \frac{\partial L}{\partial y'}(y'_{i+1}, y_{i+1}, x_{i+1}) + \frac{\partial L}{\partial y}(y'_{i+1}, y_{i+1}, x_{i+1})\Delta x = 0.$$

Esto implicaba que

$$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\partial L}{\partial y'}(y'_{i+1}, y_{i+1}, x_{i+1}) - \frac{\partial L}{\partial y'}(y'_i, y_i, x_i) \right) = \frac{\partial L}{\partial y}(y'_{i+1}, y_{i+1}, x_{i+1}).$$

Haciendo cada vez más pequeños los subintervalos de manera que $\Delta x \rightarrow 0$, esta sucesión de ecuaciones se transformaba en la ecuación diferencial parcial dada por:

$$(3.2) \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right),$$

misma que hoy en día se conoce como la ecuación de Euler-Lagrange.

Para el caso particular en el cual

$$L(y', y, x) \equiv \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2gy}},$$

obtendríamos, al resolver (3.2) que $y(x)$ es la curva braquistócrona. La forma explícita de esta curva puede encontrarse en cualquier texto de cálculo en variaciones. Ver por ejemplo [1].

Esta forma geométrica de obtener la solución a los problemas variacionales funcionaba en muchas instancias pero carecía de formalidad; sin embargo, esta situación cambió cuando en el mes de agosto de 1755, Euler recibió una carta [13] de un joven de 19 años. En ella se mostraba cómo derivar de manera simple y formal la ecuación (3.2) que hasta ese momento había utilizado Euler. El joven era Giuseppe Ludovico Lagrangia, originario de Turín, y que más tarde en su vida se establecería en Francia pasando a la historia como Joseph-Louis Lagrange, uno de los más grandes científicos del país Galo.

Aparentemente [13], Euler siempre dió crédito a Lagrange y utilizó, a partir de aquel entonces, el método y la terminología que éste había propuesto. Frecuentemente se dice que Euler dió el nombre a la disciplina en su obra *Elementa Calculi Variationum* (1766). Sin embargo, fue Lagrange el que acuñó el término de “variaciones”, aunque Euler haya sido el encargado de difundirlo.

Desde esta época la ecuación de Euler-Lagrange se estudia y enseña como herramienta para encontrar extremos de funcionales. En realidad, el método ideado por Euler y Lagrange tenía un trasfondo idealista y utópico: pretender que el cálculo en variaciones poseía la misma estructura que el cálculo diferencial e integral. La ecuación de Euler-Lagrange era, en todo caso, una condición de primer orden que equivalía a encontrar puntos extremos.

En el cálculo diferencial e integral obtenemos información acerca de la función mediante pequeñas variaciones en la variable independiente. En forma análoga, Lagrange utilizó pequeñas variaciones en las trayectorias del dominio de la funcional para conocer las propiedades de la misma. Desafortunadamente, no obstante la elegancia del método, la realidad pronto se

encargó de mostrar que las cosas no eran tan simples. Más adelante, se mostrará, con un par de ejemplos, sus limitaciones fundamentales.

Las distintas ecuaciones y leyes de movimiento derivadas por Newton tratan con cantidades vectoriales y, por lo tanto, son sensibles al sistema de coordenadas elegido. El vertiginoso desarrollo de la física a partir del siglo XVII requería del análisis de problemas cada vez más complejos, mismos que presentaban enormes dificultades técnicas. La belleza del método de Euler y Lagrange es su independencia de la elección de coordenadas. Así, no solamente aportaba un marco elegante para formular la mecánica Newtoniana, sino que facilitaba enormemente los cálculos al utilizar cantidades escalares.

En 1788 Lagrange publicó *Mechanique analytique* en donde exponía los nuevos métodos variacionales o analíticos para la mecánica. La idea principal, a semejanza de lo que había sugerido Euler anteriormente, partía de un principio fundamental de eficiencia: minimizar la llamada integral de acción dada por

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{y}, y, t) dt.$$

La contribución principal consistía en considerar a la variable temporal como la variable independiente y suponer que las trayectorias $y(t)$ surgen de un principio de mínima acción. De este modo, el principio de eficiencia de la naturaleza planteado por Euler se aplicaba al caso concreto de la mecánica de Newton. Como resultado de este planteamiento, se lograron unificar diversos puntos de vista en la modelación de fenómenos dinámicos.

Desde entonces, en honor a esta aportación fundamental, a $L(\dot{y}, y, t)$ se conoce como la función lagrangiana. Dicha función, para el caso de sistemas conservativos, está dada por la diferencia de energía cinética y potencial:

$$L = K - U.$$

La ecuación a resolver, por lo tanto, sigue siendo la ecuación de Euler-Lagrange (3.2), que en este caso adquiere la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial L}{\partial y}.$$

Este método variacional puede extenderse [6] redefiniendo adecuadamente a la función lagrangiana, para utilizarse fuera del ámbito de la mecánica clásica como en teoría de campos, relatividad general y mecánica cuántica. Por ejemplo, en relatividad general la función lagrangiana está dada por

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

A partir del siglo XX, el uso de los principios variacionales se extendió más allá de la física y la matemática a disciplinas sociales como la economía [10]. A pesar de todo el éxito del planteamiento variacional y sus innumerables aplicaciones, es necesario también estar concientes de sus limitaciones. Como veremos a continuación, existen graves problemas que surgieron

incluso antes de la publicación de *Mechanique analytique*. El mismo Euler ya era conciente de ello.

4. COMIENZAN LOS PROBLEMAS

En 1779 Euler [8] observó que el problema esencial a resolver de cálculo en variaciones era mucho más complejo que su análogo del cálculo diferencial, el cual encontraba valores extremos en el espacio euclideo. Concretamente, se dio cuenta de que las soluciones a un problema dado no eran necesariamente “suaves”; es decir, las trayectorias óptimas podían, potencialmente, no ser continuamente diferenciables. El asombro de Euler fue tal, que constantemente hablaba de este fenómeno como la paradoja del cálculo en variaciones.

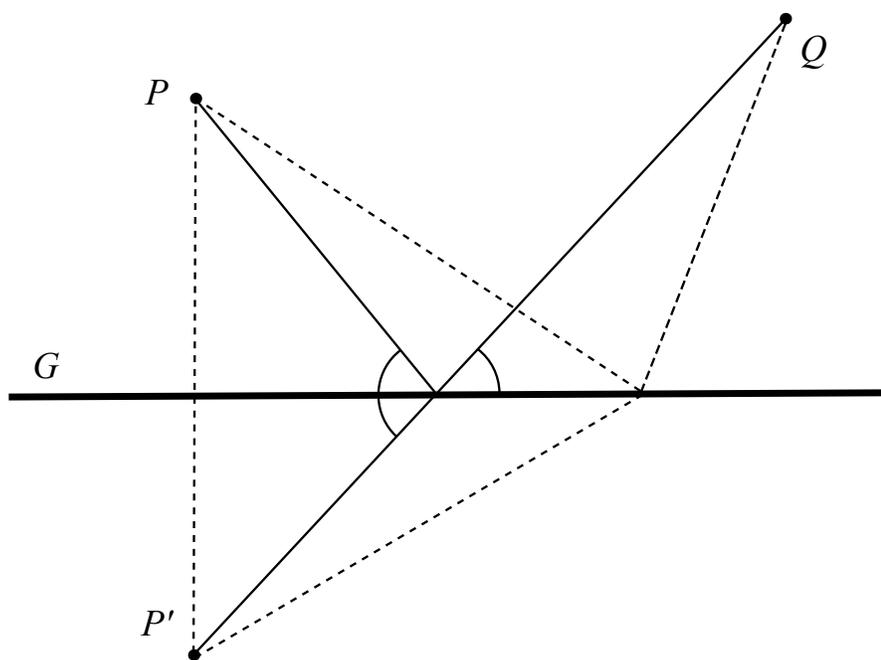


FIGURA 3. Principio de Herón.

En realidad esta observación no debería sorprendernos pues es común que la naturaleza se comporte en forma “no suave”. Un ejemplo trivial de esto es la observación de Herón quien señaló -sin demostración- que la luz que se refleja en un espejo sigue una trayectoria que minimiza el tiempo de traslado.

La idea de Herón consiste en lo siguiente. El camino más corto que une dos puntos es el segmento de recta entre ellos. Siguiendo a [8] podemos formular una pregunta un poco más difícil: encontrar el camino más corto desde un punto P a una línea G y de ahí a un punto Q , donde P y Q están en el mismo lado de G . Resulta que sólo hay un camino más corto y consiste de dos segmentos. De hecho, éstos se determinan con el criterio de ángulos de reflexión e incidencia iguales, conocido como ley de la reflexión. Esta ley es la misma que obedece, por

ejemplo, un rayo de luz que incide sobre un espejo plano o la que sigue una bola de billar que golpea una pared elástica de una mesa. De este modo, se determina un camino por medio de un principio variacional.

La idea de Herón consistía en introducir un punto virtual P' y considerar todas las trayectorias de Q a P' . La recta que une a estos puntos es la trayectoria más corta y consiste de dos segmentos: de Q a la recta G y de G a P' . El segundo segmento puede reflejarse utilizando la recta G para obtener un segmento correspondiente de G a P . De este modo obtenemos la trayectoria real y óptima de Q a P pasando por G .

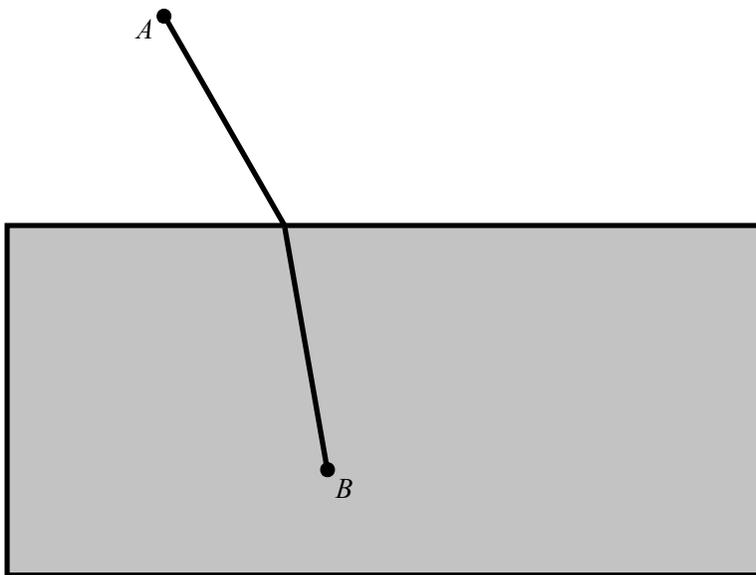


FIGURA 4. Principio de Fermat.

La observación de Herón en relación a que la luz sigue trayectorias “eficientes” fue retomada siglos después por un jurista francés aficionado a las matemáticas, el gran Pierre de Fermat (1601-1665). Fermat estudió la refracción de la luz, es decir, cuando un rayo de luz pasa de un medio a otro con distinta densidad, digamos del aire al agua. La primera observación que hizo fue que la luz viajaba más lentamente en medios más densos; de esta forma, para ir de un punto A a un punto B en un medio más denso un rayo de luz elige la trayectoria que minimiza el tiempo de traslado. En la figura 4 mostramos como se vería esta trayectoria [14].

5. LA PARADOJA

En esta sección, describimos el fenómeno “paradójico” que descubrió Euler en 1779 y que publicó bajo el nombre: *De insigni paradoxo quod in analysi maximorum el minimorum occurit*.

Como hemos visto, los problemas de optimización en espacios de funciones, con frecuencia pueden resolverse utilizando la condición *necesaria* de Euler-Lagrange. En algunos casos, esta condición también puede convertirse en *suficiente* si se cumplen ciertas características

de convexidad. Desafortunadamente, y tal como mostraremos a continuación, es común que la ecuación de Euler-Lagrange diste de ser también una condición *suficiente*. De esta forma, pueden tenerse soluciones que satisfagan las condiciones de Euler-Lagrange que, sin embargo, no correspondan a valores extremos. Asimismo, el “óptimo” obtenido puede no ser el que es más útil o bien ni siquiera pertenecer al espacio original de funciones.

Consideremos el siguiente problema de minimización.

$$(5.1) \quad \min_y \int_0^1 L(\dot{y}(t), y(t)) dt$$

sujeto a

$$(5.2) \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

donde L es la llamada función lagrangiana, que en este caso está dada por

$$(5.3) \quad L(\dot{y}, y) = ((\dot{y})^2 - 1)^2.$$

Esta función depende únicamente de la derivada \dot{y} y se ilustra en la figura 5.

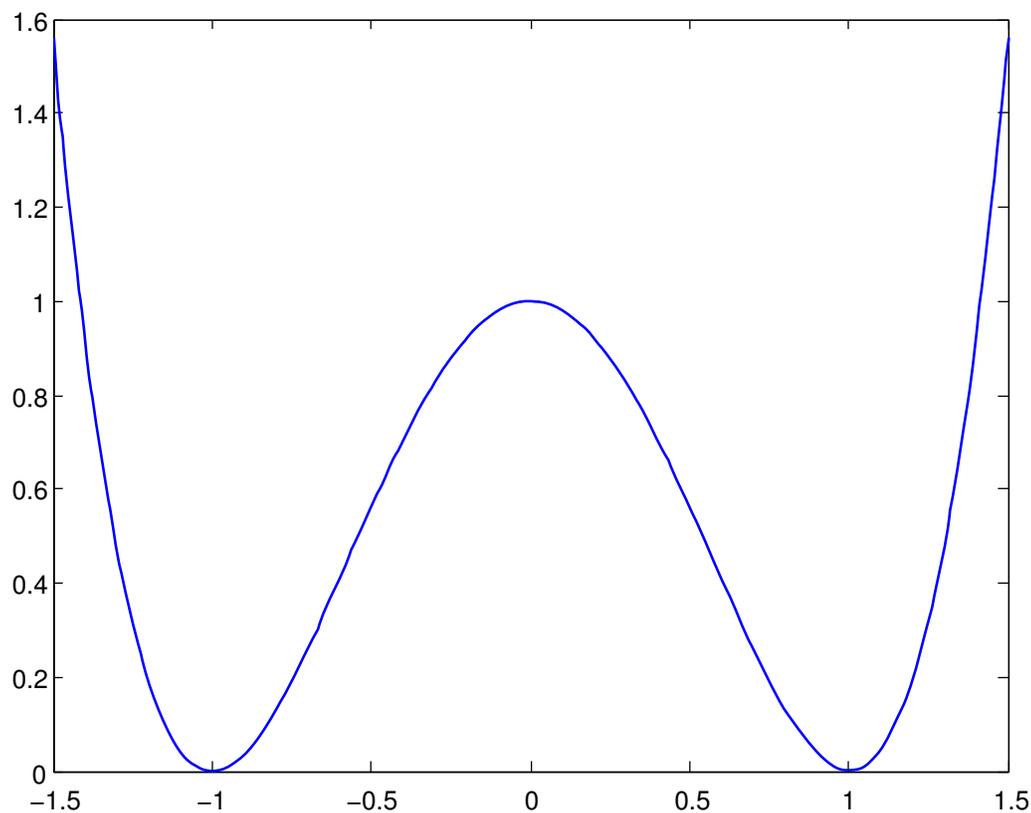


FIGURA 5. Se ilustra una gráfica de la función lagrangiana L dependiendo de \dot{y} .

El funcional a considerar en este problema es

$$(5.4) \quad J[y] = \int_0^1 ((\dot{y})^2 - 1)^2 dt,$$

cuyo dominio es un espacio de funciones que discutiremos a continuación.

Tal y como está planteado el problema original, el dominio de J es el espacio de las funciones de clase \mathcal{C}^2 en $[0, 1]$ que se anulan en los extremos. Esto es, puede considerarse a J como una función

$$J : D^2[0, 1] \rightarrow \mathbb{R},$$

en donde $D^2[0, 1] = \{y \in \mathcal{C}^2[0, 1] : y(0) = y(1) = 0\}$.

En este caso, la ecuación de Euler-Lagrange está dada como

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial L}{\partial y}.$$

De esta forma, para la función lagrangiana (5.3), se obtiene

$$\frac{d}{dt} (4((\dot{y})^2 - 1)\dot{y}) = 0.$$

Esta ecuación implica que la expresión $((\dot{y})^2 - 1)\dot{y}$ es una constante pero esto sólo puede suceder si \dot{y} es una constante. Por lo tanto, existen números A y B tales que

$$y(t) = At + B.$$

Utilizando las condiciones (5.2), obtenemos que $A = B = 0$ con lo cual $y(t) \equiv 0$. Sin embargo, al calcular el valor del funcional, obtenemos que $J[0] = 1$. Como veremos en la siguiente sección, esta solución no es, ni remotamente, un mínimo.

6. DISTINTOS DOMINIOS DEL FUNCIONAL

En lugar de $D^2[0, 1]$ podemos considerar dominios más amplios. Por ejemplo, podríamos considerar un dominio mucho más amplio:

$$D^1[0, 1] = \{y \in \mathcal{C}^1[0, 1] : y(0) = y(1) = 0\};$$

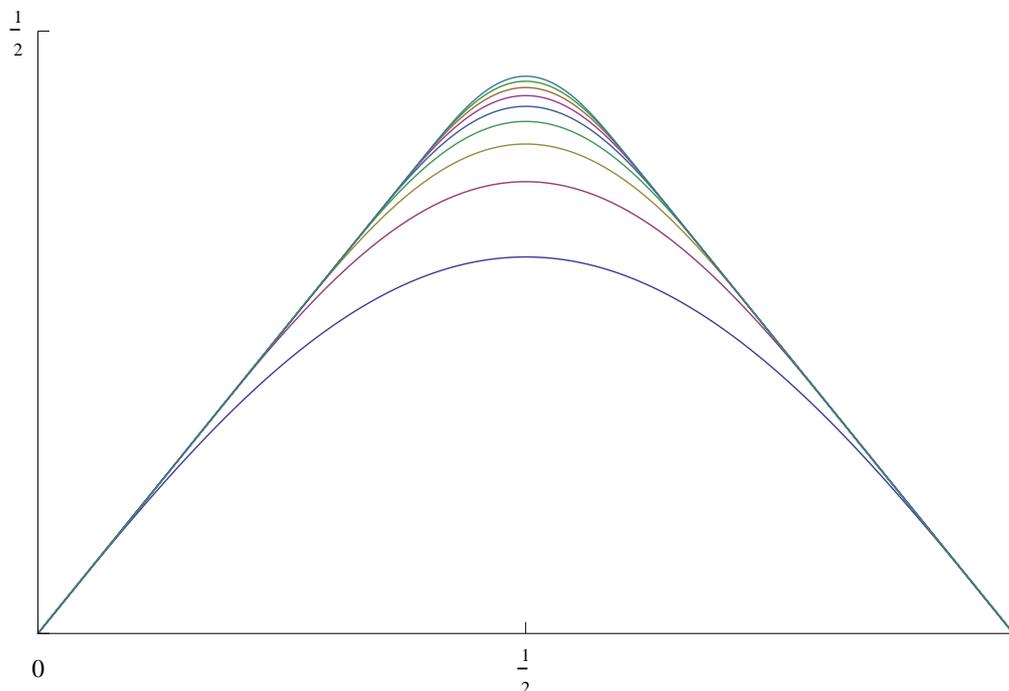
esto es, el espacio de las funciones de clase \mathcal{C}^1 en $[0, 1]$ que se anulan en los extremos. De igual forma, se puede considerar al espacio $V[0, 1]$ de funciones continuas que son continuamente diferenciables por pedazos y que se anulan en los extremos $0, 1$. Es decir, funciones continuas cuya derivada es continua en $[0, 1]$ excepto, posiblemente, en un subconjunto finito de $[0, 1]$. De manera equivalente, diremos que $f \in V[0, 1]$ si es continua y además existen números

$$a_0 = 0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$$

tales que la función f es continuamente diferenciable en cada subintervalo (a_{k-1}, a_k) para $k = 1, \dots, n$. Notemos que $D^2[0, 1] \subset D^1[0, 1] \subset V[0, 1]$.

Proposición 6.1. *Sea J el funcional definido en (5.4). Entonces,*

- a) *Existe una sucesión (y_n) en $D^2[0, 1]$ tal que $J(y_n) \rightarrow 0$.*
- b) *El ínfimo de J en $D^2[0, 1]$ es 0.*
- c) *El funcional J no tiene un mínimo en $D^1[0, 1]$.*

FIGURA 6. Elementos de la sucesión (y_n) para $n = 2, \dots, 10$.

- d) Existe un número infinito de soluciones del problema de minimización en $V[0, 1]$. Es decir, existe una infinidad de funciones $y \in V[0, 1]$ tales que $J[y] = 0$.

Demostración. Sea

$$\phi(u) = \frac{1}{8}u^4 - \frac{3}{4}u^2 - \frac{3}{8}.$$

Notemos que esta función satisface $\phi(\pm 1) = -1$, $\phi'(\pm 1) = \mp 1$ y $\phi''(\pm 1) = 0$. Lo anterior nos permite definir una familia de funciones de clase \mathcal{C}^2 del siguiente modo. Para cada $n \geq 3$, sea $y_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$y_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\phi\left(n\left(t - \frac{1}{2}\right)\right), & |t - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{2} - |t - \frac{1}{2}|, & |t - \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Es un ejercicio rutinario el verificar que cada función y_n es de clase \mathcal{C}^2 . Además, puede comprobarse directamente que se cumple la siguiente igualdad

$$J[y_n] = \frac{1}{n} \int_{-1}^1 (\phi'(u)^2 - 1)^2 du,$$

de manera que $J[y_n] \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Claramente, 0 es una cota inferior del conjunto de todos los números reales $J[y]$ con $y \in D^2[0, 1]$. Asimismo, como cada elemento de la sucesión y_n es un elemento de $D^2[0, 1]$, tenemos

que

$$\inf\{J[y] : y \in D^2[0, 1]\} = 0.$$

Dado que $D^2[0, 1] \subset D^1[0, 1]$ y 0 es una cota inferior de J , también se cumple que el ínfimo de J en $D^1[0, 1]$ es 0; es decir,

$$\inf\{J[y] : y \in D^1[0, 1]\} = 0.$$

Supongamos que $y \in D^1[0, 1]$, entonces y es una función continuamente diferenciable y cumple $y(0) = y(1) = 0$. Por el teorema del valor intermedio, existe un número $c \in (0, 1)$ tal que $\dot{y}(c) = 0$. Por lo tanto,

$$L(\dot{y}(c), y(c)) = ((\dot{y}(c))^2 - 1)^2 = 1 > 0.$$

Dado que \dot{y} es una función continua, existe un intervalo de la forma $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ tal que $L(\dot{y}(t), y(t)) > 0$, para todo $t \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. Esto implica que $J[y] > 0$.

Para finalizar, notemos que existen mucho ejemplos de funciones en $V[0, 1]$ que resuelven el problema. Basta tomar funciones continuas y lineales por pedazos de tal forma que en cada subintervalo de definición se tenga que la pendiente es ± 1 . En la figura 6 mostramos algunas posibilidades. \square

La proposición anterior nos ilustra que el ínfimo de nuestra funcional es 0; sin embargo, no existen funciones continuamente diferenciables, y por lo tanto tampoco funciones en $D^2[0, 1]$, para las cuales se alcance este ínfimo. No obstante, existen múltiples (¡a saber, una cantidad no numerable!) funciones en $V[0, 1]$ para las cuales el funcional alcanza su ínfimo.

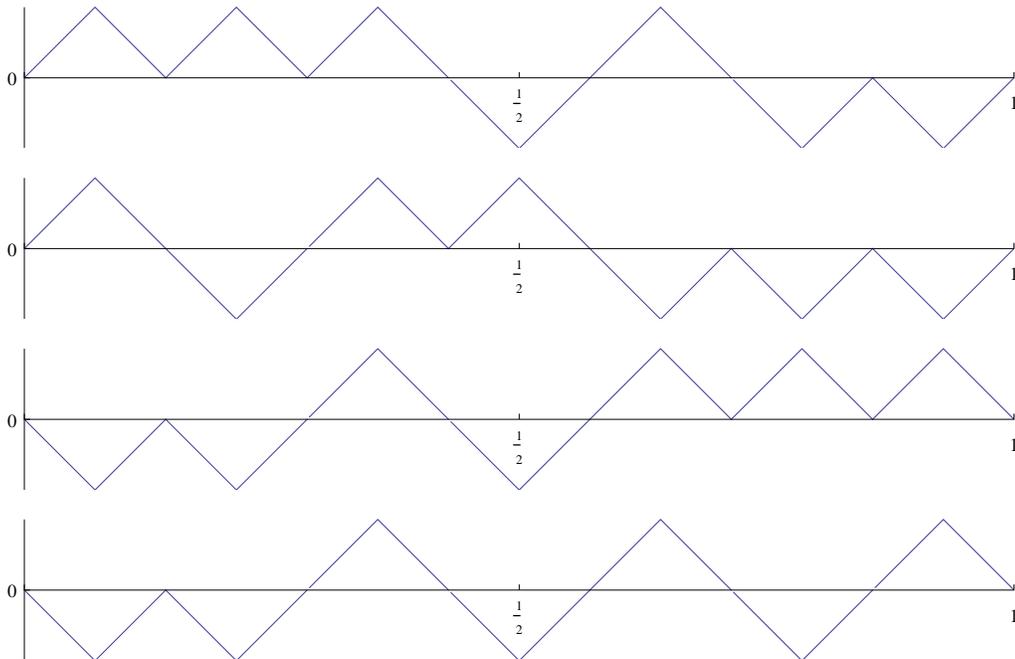


FIGURA 7. Algunos ejemplos de funciones en el espacio $V[0, 1]$ que son soluciones del problema de minimización de la paradoja de Euler.

7. UN EJEMPLO DE WEIERSTRASS

Durante el siglo XIX, quizás quien más aportó a la teoría del cálculo en variaciones fue el gran matemático alemán Karl Theodor Wilhem Weierstrass (1815-1897), no obstante, Weierstrass publicó muy pocos de sus resultados y simplemente los divulgaba como parte de sus cursos. Oskar Bolza (1857-1942) fue alumno de Weierstrass en la universidad de Berlín y en el prefacio de su libro clásico *Lectures on the Calculus of Variations*³, publicado por primera vez en 1904, aclara que utilizará las cátedras que tomó con Weierstrass, “como si éstas hubiesen sido publicadas formalmente”, dándole todo el crédito debido.

De acuerdo con Gianquinta y Hildebrandt [4], para Weierstrass no estaba claro que un funcional debiese tener un mínimo dentro de un espacio de funciones determinado, aún si el dominio del funcional se extendiera y consistiera de todas las funciones continuas. En el siguiente ejemplo, hemos adaptado las ideas de Weierstrass para mostrar un funcional relativamente sencillo definido en el espacio de funciones $V[-1, 1]$,

$$J[y] = \int_{-1}^1 t^2 (\dot{y}(t) - 1)^2 dt.$$

Claramente, 0 es una cota inferior del conjunto de valores de J en $V[-1, 1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos,

$$y_n(t) = t + \frac{\arctan(nt)}{\arctan n}.$$

Es fácil ver que se cumple

$$J[y_n] = (\arctan n)^{-2} \int_{-1}^1 \frac{n^2 t^2}{(1 + (nt)^2)^2} dt,$$

de manera que, efectuando el cambio de variable $\tau = nt$, obtenemos

$$J[y_n] = \frac{1}{n} (\arctan n)^{-2} \int_{-n}^n \left(\frac{\tau}{1 + \tau^2} \right)^2 d\tau.$$

Notemos que la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\tau}{1 + \tau^2} \right)^2 d\tau$ es convergente. Por lo tanto, $J[y_n] \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Notemos que, puntualmente y_n converge a y^* donde y^* está dada por

$$y^*(t) = \begin{cases} t + 1, & \text{si } -1 \leq t < 0, \\ 0, & \text{si } t = 0, \\ t - 1, & \text{si } 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

Por otra parte, si se tuviese una función continuamente diferenciable por pedazos $y \in V[-1, 1]$ tal que $J[y] = 0$ entonces debería cumplirse que $y(t) = t$ con excepción de un número finito de elementos de $[-1, 1]$. Esto es imposible, dado que $y(-1) = y(1) = 0$.

³Publicado por University of Chicago Press en 1904. Su reimpresión más reciente es de Scholarly Publishing Office, University of Michigan Library, 2005.

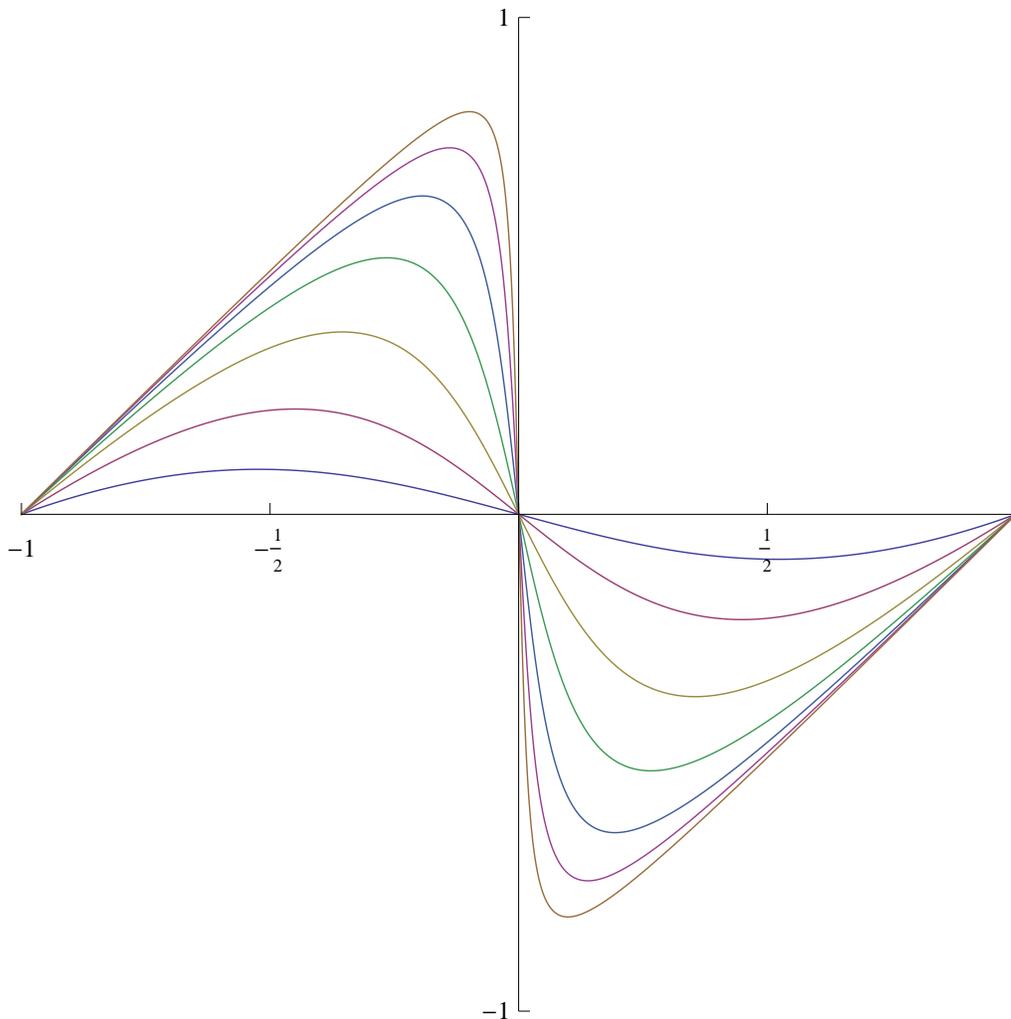


FIGURA 8. Elementos de la sucesión (y_n) para $n = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$.

Nuevamente vemos que el dominio no es apropiado para resolver el problema. En este caso debemos extender el dominio y permitir funciones con saltos (discontinuas). Notemos que el dominio no es suficientemente amplio para dejar que las sucesiones que minimizan un funcional converjan. Esta convergencia se ilustra en la figura 8.

Para completar el ejemplo, podemos verificar que las ecuaciones de Euler-Lagrange no proporcionan una respuesta satisfactoria. En este caso, si tuviésemos una función óptima y que fuese de clase \mathcal{C}^2 en $[-1, 1]$, ésta debería satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange (3.2):

$$\frac{d}{dt} (2t^2 (\dot{y}(t) - 1)) = 0.$$

Por ende, existiría una constante C tal que

$$y(t) = t - \frac{C}{t}.$$

Claramente la función no puede definirse en forma continua de manera que no existe tal constante.

De acuerdo con Struwe [12], el ejemplo de Weierstrass fue una pesada carga para el desarrollo posterior de la teoría del cálculo en variaciones durante el siglo XIX. La comunidad matemática tuvo que enfrentarse con el hecho de que en realidad no entendían muy bien el cálculo en variaciones ni éste era como el cálculo ordinario y distaba mucho de poseer métodos generales. Esto ocasionó que los grandes matemáticos de la época, tarde o temprano, se involucraran con el tema: Arzlá, Fréchet, Hilbert y Lebesgue, por nombrar algunos. Lo interesante es que en el camino se realizaron numerosos descubrimientos, todo en aras de comprender mejor el cómo encontrar los valores extremos de los funcionales.

En el famoso discurso de Hilbert [5, 7, 12] en la asamblea del centenario del Congreso Internacional 1900 en París, donde propuso 23 problemas, dos ellos se ocupan de cuestiones relacionadas con el cálculo de variaciones. Esto ocasionó que la materia tuviese un nuevo auge durante todo el siglo XX y hasta la fecha.

8. COMENTARIOS FINALES

Cuando se resuelve un problema de optimización en el espacio euclideano utilizando cálculo diferencial, la solución consiste de uno o varios puntos en este espacio. El cálculo en variaciones opera dentro de un espacio de funciones y proporciona soluciones que son funciones de este espacio. Al igual que el cálculo en variaciones, la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, en ocasiones conocida como *teoría de sistemas dinámicos*, opera también dentro de un espacio de funciones. Esta teoría se sustenta en múltiples teoremas de existencia y unicidad, mismos que permiten afirmar que las ecuaciones siempre tienen solución y que ésta es la misma independientemente del método utilizado para encontrarla.

De esta forma, la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y sus métodos de solución quedan sustentados en estos teoremas de existencia. Desafortunadamente, el cálculo en variaciones carece de un sustento similar, pues las condiciones que “resuelven” los problemas de cálculo en variaciones y teoría de control son condiciones *necesarias*. Esto es, son condiciones que se cumplen si es que se tiene una solución y ésta satisface las hipótesis requeridas por el problema en cuestión.

Esta es una diferencia esencial. Mientras en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, se garantiza que todos los problemas tienen solución, en el cálculo de variaciones puede suceder que no exista una solución. En ocasiones la solución existe pero no en un dominio que pueda ser determinado *a priori*.

La observación de Euler nos dice que la elección del espacio de funciones no es siempre clara. Esto ocasiona que no sea fácil determinar el tipo de problemas variacionales que tienen solución ni caracterizar cuando ésta es una función suave. Así las cosas, el extrapolar los conceptos del cálculo diferencial a problemas que tienen que ver con espacios de funciones es un camino, en ocasiones, incorrecto.

Gran parte de la teoría de ecuaciones diferenciales parciales se desarrolló para resolver estas dificultades. Una buena porción de esta teoría se dedica a demostrar la existencia de soluciones. Esta tarea nos puede parecer teórica y alejada de la realidad; no obstante, las demostraciones de existencia usualmente producen algoritmos numéricos que indican cómo calcular la solución en forma explícita. Asimismo, los problemas variacionales también han impulsado el desarrollo del área de las matemáticas dedicada al estudio de los espacios de funciones, conocida como análisis funcional. Por ejemplo, los espacios de Sobolev y las funciones de Schwartz fueron inventados con el afán de entender mejor el problema de optimización de funcionales.

Los ejemplos que hemos mostrado en esta nota no pueden resolverse dentro del paradigma original del cálculo en variaciones. Conceptualmente debe definirse *a priori* un dominio para cada funcional. Sin embargo, frecuentemente uno puede encontrar que dicho dominio no es suficientemente amplio para resolver el problema original. El dominio puede ampliarse a costa de añadir complejidad. Aún así, podría suceder que el extremo buscado siguiese sin pertenecer a este nuevo dominio. Lo paradójico es que frecuentemente no es claro cual debiera ser el dominio a menos que resolvamos el problema, pero ¿cómo podemos resolverlo sin conocer el dominio?

Una herramienta más adecuada es la que se encuentra en la teoría de control y en particular en el principio del máximo de Pontryagin [10]. En dicha teoría, se permite que las funciones de control tengan cierto tipo de discontinuidades. Así, se toma un dominio sumamente general desde un inicio.

El propósito original de Euler –hacer del cálculo en variaciones una generalización del cálculo diferencial e integral– no prosperó una vez que la disciplina dejó ver sus complejidades. Sin embargo, de los ejemplos que destruyeron esta ambición surgieron nuevas ideas que condujeron a aportaciones importantes. Éstas no fueron únicamente para los problemas variacionales originales, sino para otras ramas de las matemáticas como el análisis funcional.

En conclusión, la teoría del cálculo en variaciones y la teoría de control son similares a la teoría de optimización estática para encontrar valores extremos. Sin embargo, las funcionales definidas en espacios de funciones son objetos mucho más complejos que las funciones definidas en espacios euclidianos. El cálculo en variaciones sigue siendo investigado por numerosos autores debido a la gran variedad de aplicaciones que posee. Aunque los métodos se asemejan a los del cálculo, el problema general no está teóricamente resuelto en su totalidad, sino solamente para algunos casos particulares.

Los autores recomiendan tener sumo cuidado con el uso indiscriminado de la ecuación de Euler-Lagrange y los métodos de ecuaciones diferenciales para resolver las cuestiones de carácter variacional. Siempre debe contrastarse con el problema original para verificar que se está haciendo algo que tenga sentido. Las condiciones de primer orden que llevan a las ecuaciones de Euler-Lagrange son, por lo tanto, limitadas y no deben tomarse como una única forma de resolver estos problemas. Como suele suceder, no hay recetas y la creatividad es nuestro único recurso.

REFERENCIAS

- [1] VAN BRUNT, B., 2004. *The calculus of variations*. Universitext. Springer-Verlag, New York.
- [2] BUTTAZZO, G. Y B. KAWOHL, 1993. “On Newton’s problem of minimal resistance”. *Math Intelligencer*, vol. 15, núm. 4: páginas 7–12.
- [3] EULER, L., 2010. *Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes: Sive Solutio Problematis Isoperimetrici Latissimo Sensu Accepti*. BiblioBazaar. Reimpresión del original de 1744.
- [4] GIAQUINTA, M. Y S. HILDEBRANDT, 1996. *Calculus of variations. I*, vol. 310 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin. The Lagrangian formalism.
- [5] GRATTAN-GUINNESS, I., 2000. “A sideways look at Hilbert’s twenty-three problems of 1900”. *Notices Amer Math Soc*, vol. 47, núm. 7: páginas 752–757.
- [6] HANC, J. Y E. F. TAYLOR, 2004. “From conservation of energy to the principle of least action: A story line”. *American Journal of Physics*, vol. 72: páginas 514–521.
- [7] HILBERT, D., 2000. “Mathematical problems”. *Bull Amer Math Soc (NS)*, vol. 37, núm. 4: páginas 407–436. Reimpresión de *Bull. Amer. Math. Soc.* **8** (1902), 437–479.
- [8] HILDEBRANDT, S., 1989. “The calculus of variations today”. *Math Intelligencer*, vol. 11, núm. 4: páginas 50–60. Traducción del alemán al inglés por A. Shenitzer.
- [9] LAWLOR, G., 1996. “A new minimization proof for the brachistochrone”. *Amer Math Monthly*, vol. 103, núm. 3: páginas 242–249.
- [10] LOMELÍ, H. E. Y B. RUMBOS, 2010. *Métodos Dinámicos en Economía*. JIT press, 2^a edición.
- [11] STRUIK, D. J., editor, 1969. *A source book in mathematics, 1200–1800*. Harvard University Press, Cambridge, Mass.
- [12] STRUWE, M., 2008. *Variational methods: applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer.
- [13] DE TERESA, L., 2007. “Euler y el cálculo de variaciones”. *Miscelánea Mat.*, , núm. 45: páginas 25–31.
- [14] TIKHOMIROV, V. M., 1990. *Stories about maxima and minima*, vol. 1 de *Mathematical World*. American Mathematical Society, Providence, RI. Traducción del original ruso de 1986, por Abe Shenitzer.

†DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO, MÉXICO, DF 01000