ALGUNAS CONSIDERACIONES ACERCA DE LA ECUACIÓN DE EULER

HÉCTOR LOMELÍ, GUILLERMO PASTOR Y BEATRIZ RUMBOS†

Resumen. Estudiamos algunos detalles de las condiciones de segundo orden de la ecuación de Euler. Mostramos un ejemplo específico en el que las condiciones de segundo orden no son suficientes para determinar si la solución corresponde a un máximo o a un mínimo.

1. Introducción

Al resolver un problema de optimización dinámica, usualmente se utilizan condiciones de primer orden para encontrar una solución. En Cálculo de Variaciones esto se logra resolviendo la ecuación de Euler y determinando las constantes asociadas a través de la condición inicial y de las condiciones de transversalidad.

Sin embargo, como veremos en esta nota, en ocasiones estas condiciones no son suficientes para resolver el problema. Incluso, las llamadas condiciones de segundo orden nos pueden dar información incompleta o equivocada.

En esta nota resolvemos un problema que aparece en el libro de Lomelí y Rumbos [1], y analizamos las dificultades que pueden surgir de una función lagrangiana que depende del tiempo.

2. Un ejemplo

En esta sección, estudiamos con detenimiento el problema 10.8 de [1]. Se argumenta que las condiciones de segundo orden, Proposición 10.5.2 de [1], no son suficientes para determinar la naturaleza del extremo en el caso en que el tiempo final sea libre.

El problema mencionado pide encontrar el extremo de

$$\int_0^T \left(x + \dot{x}^2 + t\right)\, dt \tag{2.1}$$

para el caso en que $x(0) = x(T) = 0$ y $T > 0$ está libre.

La función lagrangiana es

$$f(x, \dot{x}, t) = x + \dot{x}^2 + t.$$

y la ecuación de Euler es

$$f_x - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}} = 0.$$

Por lo tanto, se debe resolver $1 - 2\ddot{x} = 0$. Considerando que $x(0) = 0$, se obtiene

$$x(t) = \frac{t^2}{4} + m\, t,$$

donde m es una constante por determinar.

Dado que T está libre, la condición de transversalidad es:

$$\left(f-\dot{x}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)\Big|_{t=T}=0.$$

Esto implica $x(T)+\dot{x}(T)^2+T-\dot{x}(T)(2\dot{x}(T))=0$ y, como $x(T)=0$, tenemos que se cumple $T-\dot{x}(T)^2=0$. De lo anterior obtenemos dos ecuaciones:

$$\begin{cases} T-\left(\frac{T}{2}+m\right)^2=0, \\ \\ \frac{T^2}{4}+mT=0. \end{cases}$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores, obtenemos dos posibles soluciones

a) $m=-4$, $T=16$.
b) $m=0$, $T=0$.

Como $T>0$ tenemos que necesariamente $T=16$ y

$$x(t)=\frac{t^2}{4}-4t.$$

La condición de transversalidad dice que la función anterior es un extremo, más no indica si éste es máximo o mínimo. Para ilustrar esta dificultad, consideremos que el problema se resuelve con T dado y fijo. Consideremos que problema de minimización con $x(0)=0$, $x(T)=0$ y $T>0$.

Dado que $x(t)=t^2/4+mt$ tenemos que se debe cumplir $\frac{T^2}{4}+mT=0$ y por lo tanto $m=-\frac{T}{4}$. Esto nos dice que, con $T>0$ dado, obtenemos la solución

$$x(t)=\frac{t^2}{4}-\frac{T}{4}t.$$

Sea $J(T)$ el valor del funcional dado por (2.1) correspondiente a cada valor $T>0$. Es decir,

$$J(T)=\int_0^T\left[\left(\frac{t^2}{4}-\frac{T}{4}t\right)+\left(\frac{t}{2}-\frac{T}{4}\right)^2+t\right]dt=\frac{1}{2}T^2-\frac{1}{48}T^3.$$

Podemos variar T para encontrar los extremos de J. Al derivar, se tiene que

$$J'(T)=T-\frac{1}{16}T^2=0$$

y, por ende, J tiene puntos críticos en $T=0$ ó $T=16$. Además,

$$J''(T)=1-\frac{T}{8}$$

y por lo tanto $J''(0)=1$ y $J''(16)=-1$. Esto implica que 0 es un mínimo local de J y 16 es un máximo local. Es decir, $T=16$ no resuelve el problema de minimización a pesar de que $f(x,\dot{x},t)=x+\dot{x}^2+t$ sea convexa en $(x,\dot{x})$. El hecho a resaltar es que la Proposición 10.5.2 de [1] sólo es válida para el caso en que tanto el tiempo final y como el valor final de x están dados.

3. Condiciones de segundo orden

En esta sección mostramos, con otro ejemplo, las dificultades que pueden surgir cuando tratamos de distinguir si una función crítica x^* determina un máximo o un mínimo local para el funcional $J[x]$. Consideremos el problema de encontrar el mínimo de la funcional

$$J[x] = \int_0^T \left[x^2 + (\dot{x})^2 + g(t)\right] dt \tag{3.1}$$

con $x(0) = x(T) = 0$ y T libre. Supondremos además que la función $g(t)$ es monótona (creciente o decreciente) y $g(T_0) = 0$ para algún $T_0 > 0$.

En este caso, la función lagrangiana es

$$f(x, \dot{x}, t) = x^2 + (\dot{x})^2 + g(t).$$

La ecuación de Euler es

$$\ddot{x} - x = 0,$$

cuya solución general está dada por

$$x(t) = me^t + ne^{-t}.$$

Claramente, si $x(0) = 0$ entonces $m + n = 0$ de modo que

$$x(t) = m\left(e^t - e^{-t}\right)$$

y

$$\dot{x}(t) = m\left(e^t + e^{-t}\right).$$

La condición de transversalidad se reduce a

$$x(T)^2 - \dot{x}(T)^2 + g(T) = 0,$$

y por tanto,

$$-4m^2 + g(T) = 0.$$

Además $x(T) = 0$ implica $m\left(e^T - e^{-T}\right) = 0$. Así, si $T > 0$ entonces $m = 0$. Concluimos, de este modo, que si el problema tiene solución, las condiciones de transversalidad indican que la solución óptima viene dada por la función constante $x(t) = 0$ y que el tiempo óptimo es $T = T_0$, la raíz de la función g. Es claro que la función $f(x, \dot{x}, t) = x^2 + (\dot{x})^2 + g(t)$ es estrictamente convexa en $(x, \dot{x})$ por lo que resulta razonable suponer que la solución encontrada es efectivamente el mínimo que buscábamos. Sin embargo, éste no necesariamente es el caso, pues no se han considerado las propiedades de g.

Al igual que en ejemplo anterior, consideraremos el problema asociado, donde ahora suponemos que $T > 0$ está fijo. Deseamos entonces optimizar

$$\int_0^T \left[x^2 + (\dot{x})^2 + g(t)\right] dt$$

con $x(0) = x(T) = 0$, $T > 0$ dado. Se obtiene de igual forma que $x(t) = m\left(e^t - e^{-t}\right)$ y de las condiciones iniciales y finales se concluye que $x(t) \equiv 0$.

Como $x^2 + (\dot{x})^2 + g(t)$ es estrictamente convexa en $(x, \dot{x})$ entonces por la Proposición 10.5.2 de [1]

$$J(T) = \int_0^T g(t)\ dt$$

es el valor mínimo con T dada.

Sin embargo, podemos considerar cómo cambia la respuesta si se supone que el valor de T también varía. Derivando obtenemos: $J'(T) = g(T)$, y $J''(T) = g'(T)$. Así, J tiene un único punto crítico en $T = T_0$. De hecho, la gráfica de J es la envolvente de los mínimos con T dado.

Aquí distinguimos dos casos, dependiendo si la función g es creciente o decreciente. Analicemos ambos.

Si $g(t)$ es creciente, el valor mínimo de (3.1) con $x(0) = x(T) = 0$, y T libre es efectivamente $\int_0^{T_0} g(t)\ dt$. Sin embargo, si $g(t)$ es estrictamente decreciente y se considera a T libre, el problema de minimización no tiene solución ya que

$$\lim_{t\to\infty} J(T) = \lim_{t\to\infty} \int_0^T g(t)\ dt = -\infty.$$

La demostración del límite anterior está basada en una idea simple. Dado que g es estrictamente decreciente, podemos encontrar $T_1 > T_0$, tal que $g(T_1) < g(T_0) = 0$ y por lo tanto, $g(x) < 0$ para todo $x > T_1$. Entonces $\int_0^T g(t)\ dt \leq \int_0^{T_1} g(t)\ dt + (T - T_1)g(T_1)$, para todo $T > T_1$. Esto implica el resultado, los detalles se dejan al lector.

Cabe aclarar que $\int_0^{T_0} g(t)\ dt$ no es el valor máximo, ya que es evidente podemos elegir funciones diferenciables $x(t)$ con $x(0) = x(T) = 0$ que hagan que la funcional

$$\int_0^T \left[x^2 + (\dot{x})^2 + g(t)\right]\ dt$$

tome valores arbitrariamente grandes.

4. Conclusión

Por lo que hemos visto en esta nota, debemos tener sumo cuidado cuando usemos las condiciones de segundo orden. En particular, si la función lagrangiana depende explícitamente del tiempo y se considera tiempo final libre, dichas condiciones no nos dan necesariamente una respuesta adecuada.

Referencias

[1] Lomelí, H. E. y B. Rumbos, 2010. *Métodos Dinámicos en Economía*. JIT press, 2ª edición.

†Departamento de Matemáticas, Instituto Tecnológico Autónomo de México, México, DF 01000