Soluciones del capítulo 2
Ecuaciones diferenciales lineales

Héctor Lomelí y Beatriz Rumbos

February 5, 2010

2.1

a) $x(t) = t + \frac{A}{t} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t)t = 1 - \frac{A}{t^2} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} + \frac{x}{t} = 1 + \frac{A}{t^2} + 1 - \frac{A}{t^2} = 2.$

b) Si hacemos $x(t) = A\cos 3t + B\sin 3t + \frac{1}{8}\cos t$ entonces las derivadas satisfacen $\dot{x}(t) = -3A\sin 3t + 3B\cos 3t - \frac{1}{8}\sin t$ y $\ddot{x}(t) = -9A\cos 3t - 9B\sin 3t - \frac{1}{8}\cos t$. Por lo tanto, $\ddot{x} + 9x - \cos t =$

$$-9A\cos 3t - 9B\sin 3t - \frac{1}{8}\cos t + 9A\cos 3t + 9B\sin 3t + \frac{9}{8}\cos t - \cos t = 0.$$

c) Si $x(t) = \frac{t^3(1+t)}{4} + \frac{1}{t} + 1$ entonces $\dot{x}(t) = \frac{3}{4}t^2(1+t) + \frac{1}{4}t^3 - \frac{1}{t^2} = \frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{t^2} + t^3$.

Por lo tanto, $\frac{x}{t+1} - \frac{x}{t} + t^2 + t^3 = \frac{t^3}{4} + \frac{1}{t(t+1)} + \frac{1}{t+1} - \frac{t^2(1+t)}{4} - \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + t^2 + t^3$.

$= \frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{t^2} + t^3$. En cuanto a la condición inicial: $x(1) = \frac{2}{4} + 2 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$.

2.2

$b = -3, \quad c = 6, \quad x_0 = 5$

2.3

$\alpha = 3, \quad \beta = -\frac{1}{9}, \quad A = \frac{1}{18}, \quad B = \frac{1}{18}$. Por lo tanto la solución para las condiciones iniciales dadas es $x(t) = -\frac{1}{9} + \frac{1}{18}e^{3t} + \frac{1}{18}e^{-3t}$

2.4

Si $y(v) = e^{-v}(\alpha\cos v + \beta\sin v)$, entonces

$$\begin{aligned} y'(v) &= e^{-v}(((\beta-\alpha)\cos v - (\alpha+\beta)\sin v), \\ y''(v) &= e^{-v}(2\alpha\sin v - 2\beta\cos v). \end{aligned}$$

Esto implica que $y''(v) + 2y'(v) + 2y(v) =$

$$e^{-v}(2\alpha\sin v - 2\beta\cos v) + 2e^{-v}((\beta-\alpha)\cos v - (\alpha+\beta)\sin v)) + 2e^{-v}(\alpha\cos v + \beta\sin v) = 0.$$

Al resolver obtenemos $\alpha = 0, \quad \beta = 7$. Por lo tanto, la solución para las condiciones dadas se puede escribir como $y(v) = 7e^{-v}\sin v$.

2.5

a) $x(t) = ke^{5t}$, la solución no converge a su estado estacionario.

b) $x(t) = ke^{-\frac{2}{t}}$, la solución sí converge a su estado estacionario.

c) $x(t) = 8 + ke^{-t}$, la solución sí converge a su estado estacionario.

d) $x(t) = 2 + ke^{5t}$, la solución no converge a su estado estacionario.

2.6

$P(t) = 5 + ke^{-6t}$, el estado estacionario es $P^* = 5$. La solución sí converge a su estado estacionario.

2.7

a) $P(t) = P_0 e^{at}$.

b) $t^* = \frac{\log 2}{a}$.

c) $\lim_{t\to\infty} P(t) = 0$.

2.8

$P(t) = P_0 e^{(\alpha-\beta)t}$.

Si $\alpha > \beta$, $\lim_{t\to\infty} P(t) = \infty$, es decir que P crece indefinidamente.
Si $\alpha = \beta$, $\lim_{t\to\infty} P(t) = P_0$, es decir que P es siempre constante.
Si $\alpha < \beta$, $\lim_{t\to\infty} P(t) = 0$, es decir que P se extingue.

2.9

$$P(t) = \frac{E}{a} + \left(P_0 - \frac{E}{a}\right) e^{at}.$$

Si $P_0 = \frac{E}{a}$, entonces $\lim_{t\to\infty} P(t) = \dfrac{E}{a}$, es decir que la población es constante.
Si $P_0 > \frac{E}{a}$, entonces $\lim_{t\to\infty} P(t) = \infty$, es decir que la población es creciente.
Si $P_0 < \frac{E}{a}$, entonces $\lim_{t\to\infty} P(t) = -\infty$, es decir que la población es decreciente.

2.10

Factor de integración $\mu(t) = e^{\int_t^T r(s)ds}$. Interpretación: $Y(t)$ es la inversión, $B(t)$ es el precio del bono y $\frac{Y_T}{B_T} + \int_T^t \delta(s)ds$ es la cantidad de bonos que se tienen en la inversión.

2.11

a) $r(t) = r_0 - \frac{1}{t+1}$.

b) $B(t) = e^{r_0(t-T)}\left(\frac{T+1}{t+1}\right)$.

c) $\delta(t) = -e^{r_0(T-t)}$.

Si $\delta < 0$ tenemos retiros.

d) $Z(t) = \frac{1}{r_0}\left(e^{r_0}(T-t) - 1\right) + 1$.

e) $Y(t) = \frac{T+1}{t+1}\left[1 + \frac{1}{r_0}\left(e^{-r_0(t-T)} - 1\right)\right]$.

2.12

a) $\dot{Y}$ es el cambio en la inversión. Se debe a las ganancias rY generadas por invertir Y a una tasa r menos las perdidas $-X(t)$ debidas al flujo de inversión.

b) La solución general es de la forma

$$Y(t) = e^{r(t-T)}Y(T) + e^{rt}\int_t^T e^{-rs}X(s)ds.$$

Con $Y(T) = e^{rT}\int_T^\infty e^{-rs}X(s)ds$.

c) $\lim_{T\to\infty} Y(t) = e^{rt}\int_t^\infty e^{-rs}X(s)ds$, entonces, cuando $T \to \infty$, la solución se puede reescribir haciendo el cambio de variable $\tau = s - t$ como

$$Y(t) = \int_0^\infty e^{-r\tau}X(t+\tau)d\tau.$$

d) El valor de la inversión en el tiempo t es igual al valor descontado del flujo de que genera.

2.13

$$\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\left[af(t)+bg(t)\right]dt = \int_0^\infty e^{-st}\left(af(t)\right)dt + \int_0^\infty e^{-st}\left(bg(t)\right)dt =$$
$$a\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt + b\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

2.14

a) $x(t) = \frac{1}{2} + ce^{-2\sin t}$.

b) $x(t) = \frac{1}{2} + ce^{-t^2}$.

c) $x(t) = 5 + e^{-\frac{1}{3}t^3}$.

d) $x(t) = -\frac{1}{7}e^t + e^{-6t}$.

e) $y(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-u^3}$.

2.15

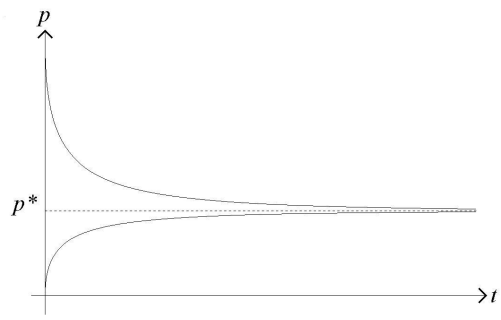
a) $\dot{p}^e + \left(\frac{\alpha r}{r-\alpha}\right)p^e = \frac{d\alpha}{r-\alpha}$. Resolviendo: $p^e(t) = \frac{d}{r} + \left(p_0^e - \frac{d}{r}\right)e^{-\left(\frac{\alpha r}{r-\alpha}\right)t}$.

b) $\int_0^\infty de^{-rt}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b de^{-rt}dt = -\frac{d}{r}\lim_{b\to\infty}\left[e^{-rb}-1\right] = \frac{d}{r}$.

c) $\lim_{t\to\infty} p^e(t) = \frac{d}{r} + \left(p_0^e - \frac{d}{r}\right)\lim_{t\to\infty} e^{-\left(\frac{\alpha r}{r-\alpha}\right)t} = \frac{d}{r} = p^*$ ya que $\alpha, r > 0$ y $rZ\alpha$.

d) Sustituyendo (2.29) en (2.28) se tiene que $p = \frac{d}{r} + \frac{\alpha}{r}(p - p^e)$. Por lo tanto $p = p^*\frac{\alpha}{r}(p - p^e)$. Ahora bien, usando la solución para p^e se obtiene que $p(t) = \left(\frac{r}{r-\alpha}\right)p^* - \left(\frac{\alpha}{r-\alpha}\right)p^e$. Por lo tanto

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \left(\frac{r}{r-\alpha}\right)p* - \left(\frac{\alpha}{r-\alpha}\right)\lim_{t\to\infty} p^e(t) = \left(\frac{r}{r-\alpha}\right)p^* - \left(\frac{\alpha}{r-\alpha}\right)p^* = p^*.$$



e) $p(t) = p^* - \left(\frac{\alpha r}{r-\alpha}\right)(p_0^e - p^*)e^{-\left(\frac{\alpha r}{r-\alpha}\right)t}$ y $p^e(t) = p^* + (p_0^e - p^*)e^{-\left(\frac{\alpha r}{r-\alpha}\right)t}$, con $r > \alpha$.

2.16

Si $v = \log(y)$ entonces $y = e^v$ y $\dot{y} = e^v\dot{v}$. Sustituyendo $e^v\dot{v} + P(t)e^v = Q(t)e^v v$. Por lo tanto $\dot{v} - P(t)v = -P(t)$.

2.17

Sea $v = \log(y)$, resolviendo para v se obtiene $v(t) = -\frac{t^3}{4} + \frac{c}{t}$. Como $y = e^v$ entonces $y(t) = e^{-\frac{t^3}{4}+\frac{c}{t}}$.

2.18

Sea $A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = 0$ una ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes, donde $A \neq 0$ y $B, C \in \mathbb{R}$. Sean x_1, x_2 dos soluciones de la ecuación, es decir $A\ddot{x}_1 + B\dot{x}_1 + Cx_1 = 0$ y $A\ddot{x}_2 + B\dot{x}_2 + Cx_2 = 0$. Sea $x_3 = ax_1 + bx_2$. Entonces $A\ddot{x}_3 + B\dot{x}_3 + Cx_3 = A\left(a\ddot{x}_1 + b\ddot{x}_2\right) + B\left(a\dot{x}_1 + b\dot{x}_2\right) + C\left(ax_1 + bx_2\right) = a\left(A\ddot{x}_1 + B\dot{x}_1 + Cx_1\right) + b\left(A\ddot{x}_2 + B\dot{x}_2 + Cx_2\right) = 0$. Por lo tanto x_3 es también solución de la ecuación.

2.19

a) $\ddot{x} = -1,\ x(0) = 2,\ \dot{x}(0) = 4.$

b) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 5t - 7.$

c) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0.$

2.20

a) $x(t) = e^t.$

b) $x(t) = e^{\frac{5}{4}t}\left[3\cos\frac{\sqrt{23}}{4}t + \frac{13}{\sqrt{23}}\sin\frac{\sqrt{23}}{4}t\right].$

c) $x(t) = e^{-t}\left[\cos t + \sin t\right].$

d) $x(t) = (1 - 3t)\,e^{3t}.$

2.21

a) $x(t) = c_1 e^{\left(1+\sqrt{2}\right)t} + c_2 e^{\left(1-\sqrt{2}\right)t} - 7.$

b) $x(t) = c_1 \cos t - c_2 \sin t + 1.$

c) $x(t) = e^{\frac{5}{4}t}\left[c_1 \cos \frac{\sqrt{23}}{4}t - c_2 \sin \frac{\sqrt{23}}{4}t\right] + 3.$

d) $x(t) = c_1 + c_2 e^{3t} - 4t.$

e) $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - \frac{1}{2}.$

f) $x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t} + \frac{1}{9}.$

2.22

Si definimos $\delta = \sqrt{\alpha\gamma - \dfrac{\beta^2}{4}}$, entonces

$$p(t) = \bar{m} + e^{-\frac{\beta}{2}t}\left(A\cos\delta t + B\sin\delta t\right),$$

$$u(t) = \bar{u} - \frac{1}{\gamma}e^{-\frac{\beta}{2}t}\left[\left(B\delta - \frac{1}{2}\beta A\right)\cos\delta t - \left(\frac{1}{2}\beta B + A\delta\right)\sin\delta t\right].$$

Además $\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = \bar{m}$ y $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = \bar{u}$, lo que quiere decir que se satisface el mismo comportamiento asintótico que en el caso $\beta^2 > 4\alpha\gamma$.

2.23

a) $x(t) = c_1 \cos 2t - c_2 \sin 2t - \frac{t}{4}\cos 2t.$

b) $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} - 3t^2 + 4t - \frac{14}{3}.$

c) $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - \frac{4}{3}te^{-t}.$

d) $x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2}e^t - \cos t + 2\sin t.$

e) $x(t) = e^{-3t}\left(c_1 \cos 2t - c_2 \sin 2t\right) + e^{-2t}\left(\frac{1}{17}\cos 2t + \frac{4}{17}\sin 2t\right).$

2.24

La solución general es $x(t) = k_1 e^t + k_2 e^{2t} + k_3 e^{-t}$, donde k_1, k_2, y k_3 son constantes arbitrarias.

2.25

Usando la fórmula (2.32) se obtienen las siguientes soluciones particulares.

a) $K_p(t) = \dfrac{1}{\delta + r}\left(\dfrac{e^{-\delta t} - 1}{\delta} + \dfrac{e^{rt} - 1}{r}\right).$

b) $K_p(t) = \dfrac{1}{\delta + r}\left(\dfrac{-e^{-\delta t} - \delta t + 1}{\delta^2} + \dfrac{e^{rt} - rt - 1}{r^2}\right).$

c) $K_p(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 1, \\ \dfrac{1}{\delta + r}\left(\dfrac{e^{-\delta(t-1)} - 1}{\delta} + \dfrac{e^{r(t-1)} - 1}{r}\right), & t > 1. \end{cases}$