Soluciones del capítulo 3
Ecuaciones no lineales de primer orden

Héctor Lomelí y Beatriz Rumbos

9 de marzo de 2010

3.1

a) $x(t) = t$.

b) $x(t) = t$.

c) $x(t) = \frac{1}{2-t}$.

d) $x(t) = \tan\left(t - 1 + \frac{\pi}{4}\right)$.

e) $x(t) = \sqrt[3]{2\,(t+1)^{3/2} - 4\sqrt{2} + 1}$.

3.2

a) $y(x) = \sin^{-1}\sqrt{\frac{2}{x^2+1}}$.

b) $y - \log|y+2| = -\log|x+4| - 1$.

c) $y(t) = -\sqrt{\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{3t}}$.

3.3

a) $N(t) = \frac{N^*}{1+\left(\frac{N^*}{N_0}-1\right)e^{-N^*kt}}$ para $N_0 \neq N^*$. Si $N_0 = N^*$ entonces $N(t) \equiv N^*$.

b) $\lim\limits_{t\to\infty} N(t) = N^*$; es decir, el número de personas que habrá oído el numor cuando t sea muy grande tenderá al número total de personas del pueblito.

c) Cuévano, Plan de Abajo.

3.4

Haciendo $w = k^{1-\alpha}$ se obtiene la ecuación $\dot{w} = (1-\alpha)s - (1-\alpha)(n+n)w$. Por lo tanto,

$$w(t) = c\ \exp[-(1-\alpha)(n+\delta)t] + \frac{s}{n+\delta}.$$

De ahí que la solución solución para k es de la forma

$$k(t) = w(t)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left[c\ \exp[-(1-\alpha)(n+\delta)t] + \frac{s}{n+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

donde c es una constante. Además, $\lim\limits_{t\to\infty} k(t) = \left[\frac{s}{n+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = k^*$.

3.5

a) $\frac{\dot{L}}{L} = \alpha - \beta\frac{L}{Y} = \alpha - \beta\frac{L}{K^\gamma L^{1-\gamma}} = \alpha - \beta\frac{L^\gamma}{K^\gamma}$. Por lo tanto, $\dot{L} = \alpha L - \beta\frac{L^{\gamma+1}}{K^\gamma}$, donde K es constante.

b) Haciendo $w = L^{-\gamma}$ se obtiene la ecuación

$$\dot{w} = -\gamma\alpha w + \frac{\beta\gamma}{K^\gamma},$$

y por ende

$$w(t) = \left(\frac{1}{L_0^\gamma} - \frac{\beta}{\alpha K^\gamma}\right)e^{-\alpha\gamma t} + \frac{\beta}{\alpha K^\gamma}.$$

Por lo tanto, $L(t) = w(t)^{-\frac{1}{\gamma}} = \left[\left(\frac{1}{L_0^\gamma} - \frac{\beta}{\alpha K^\gamma}\right)e^{-\alpha\gamma t} + \frac{\beta}{\alpha K^\gamma}\right]^{-\frac{1}{\gamma}}$.

c) $\lim_{t\to\infty} L(t) = \left(\frac{\beta}{\alpha K^\gamma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma}} K$.

3.6

a) Notemos que

$$\frac{C\alpha}{r} - L = L - C.$$

Sea $y = \frac{r}{C}(P - L)$, entonces

$$\dot{y} = \frac{r}{C}\dot{P} = \frac{r}{C}\left(rP\left(1 - \frac{P}{C}\right) - E\right) = -\left(\frac{r}{C}P\right)^2 + \frac{r^2}{C}P - \frac{r}{C}E.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
-\alpha y - y^2 &= -\frac{r\alpha}{C}(P - L) - \left(\frac{r}{C}(P - L)\right)^2 \\
&= -\left(\frac{r}{C}\right)^2 (P - L)\left((P - L) + \frac{C\alpha}{r}\right) \\
&= -\left(\frac{r}{C}\right)^2 (P - L)\,(P - (C - L))\,.
\end{aligned}$$

Al multiplicar los factores del polinomio se obtiene la igualdad.

b) Sea $w = y^{-1}$. La ecuación para w es $\dot{w} = \alpha w + 1$. Su solución esta dada por $w(t) = ke^{\alpha t} - \frac{1}{\alpha}$, donde k es una constante. Despejando la constante, obtenemos que $k = 1/y_0 + 1/\alpha$. Esto implica que

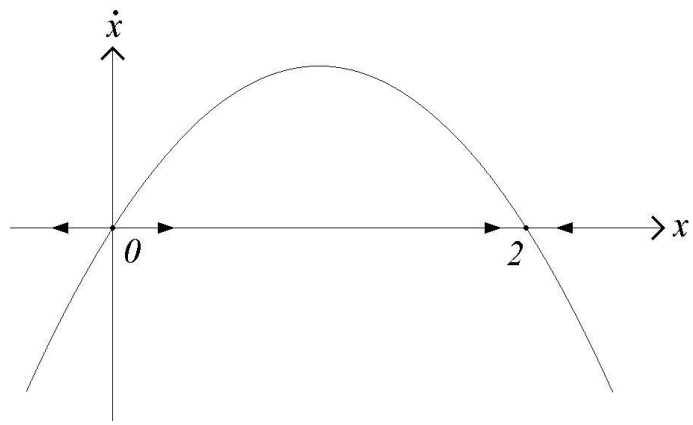
$$y(t) = \frac{\alpha y_0}{(y_0 + \alpha)e^{\alpha t} - y_0}.$$

La solución para P es $P(t) = \frac{C}{r}y(t) + L$, donde $y_0 = \frac{r}{C}(P_0 - L)$.

c) Notemos que

$$y_0 + \alpha = \frac{r}{C}\left(P_0 - L + \frac{C\alpha}{r}\right) = \frac{r}{C}(P_0 - (C - L))\,.$$

Por lo tanto, si $P_0 > C - L$, entonces $y_0 + \alpha > 0$. En tal caso $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} P(t) = L$.



3.7

a) $x(t) = \frac{1}{2t-2+ce^{-t}}$.

b) Sea $w = y^{-2}$, entonces su solución es $w(x) = x + \frac{1}{2} + ce^{2x}$. Por lo tanto $y(x) = \pm\left(x + \frac{1}{2} + ce^{2x}\right)^{-\frac{1}{2}}$. El signo depende de la condición inicial que se utilice.

c) Sea $w = y^{-1}$. Entonces w satisface la ecuación

$$w' + \frac{1}{x}w = \frac{1}{x},$$

cuya solución es $w(x) = \frac{x+c}{x}$. Por lo tanto $y(x) = \frac{x}{x+c}$.

d) Sea $w = y^{-3}$. Resolviendo la ecuación diferencial para w, obtenemos $w(x) = x^3(2x^3 + c)$. Por lo tanto,

$$y(x) = \frac{1}{x\left(2x^3 + c\right)^{\frac{1}{3}}}.$$

3.8

a) Sea $w = x^{-6}$, entonces w satisface $\dot{w} = 6w - 6$ y la solución es $w(t) = 1 + ce^{6t}$. Por lo tanto $x(t) = \left(1 + ce^{6t}\right)^{-1/6}$. Considerando la condición inicial, se obtiene $c = 0$ y por tanto $x(t) = 1$.

b) Sea $w = x^{-4}$, entonces w satisface

$$\dot{w} = \frac{-44}{t}w - \frac{4}{t^2}.$$

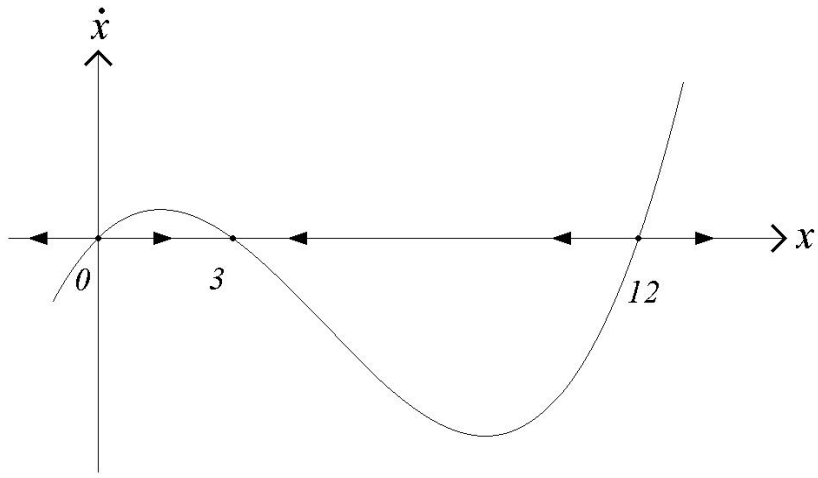
Por ende, la solución es $w(t) = -\frac{4}{43}t^{-1} + ct^{-44}$ y por lo tanto $x(t) = \left(-\frac{4}{43}t^{-1} + ct^{-44}\right)^{-1/4}$. Al sustituir la condidicón inicial se encuentra que $c = 47/43$.

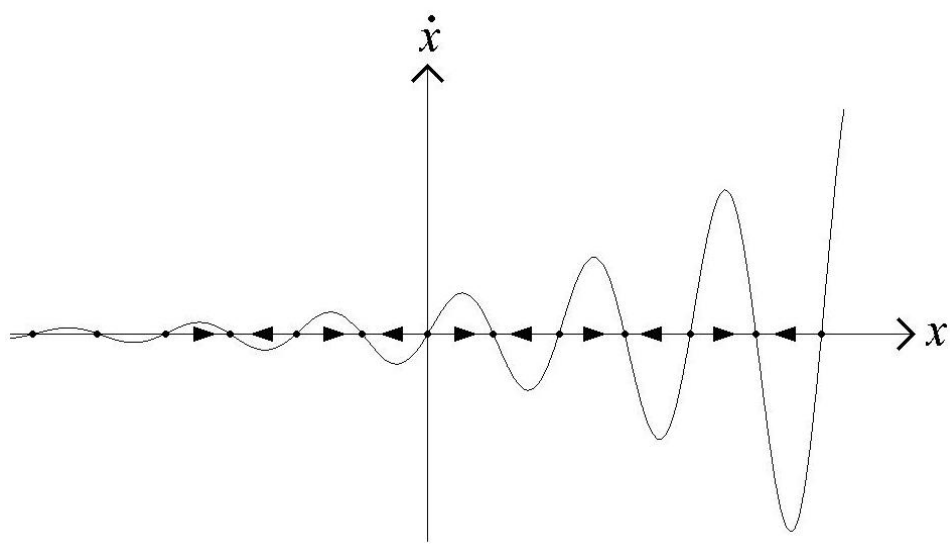
c) Sea $w = y^{-2}$, entonces su solución es $w(t) = t^{-1} + ct^{-1/2}$. Por lo tanto $y(t) = \left(t^{-1} + ct^{-1/2}\right)^{-1/2}$. Considerando la condición inicial, $y(t) = \sqrt{t}$ con $t \geq 0$.

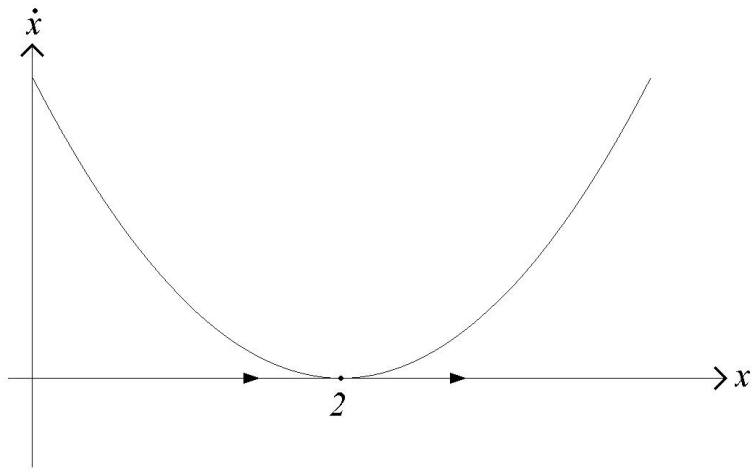
3.9

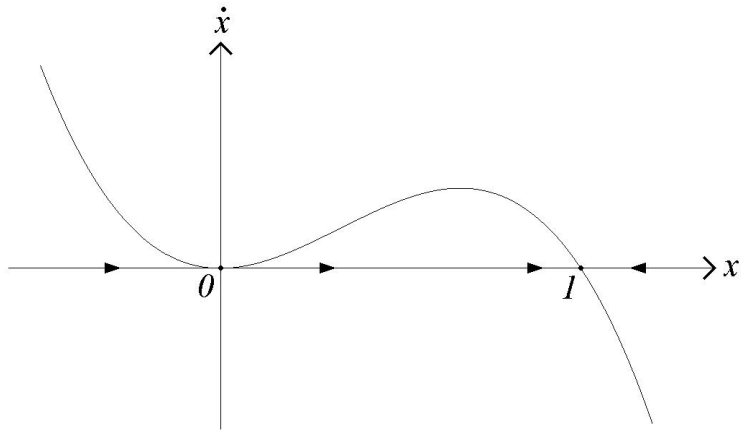
a) $x = 0$ equilibrio inestable; $x = 2$ equilibrio estable.

b) $x = 0$, $x = 12$ equilibrios inestables; $x = 3$ equilibrio estable.


$\dot{x}$
x
0
3
12


$\dot{x}$
x





c) $x = 2n\pi$ equilibrios inestables; $x = (2n+1)\pi$ equilibrios estables.

d) $x = k$ equilibrio estable.

3.10

a) Si $x_0 < 2$ entonces $x(t)$ converge a 2. Si $x_0 > 2$ entonces $x(t)$ diverge.

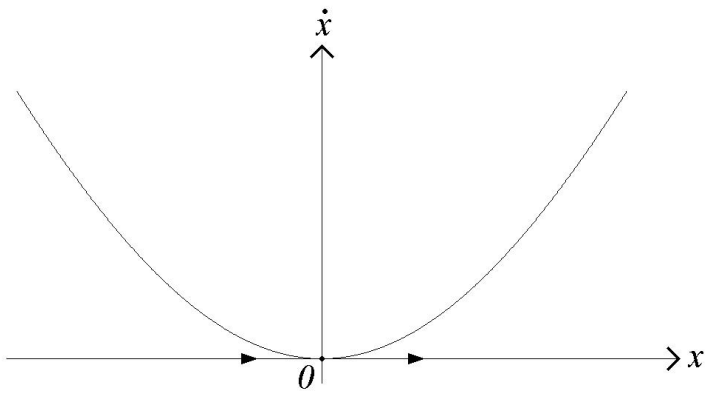
b) Si $x_0 < 0$ entonces $x(t)$ converge a 0. Si $x_0 > 0$ entonces $x(t)$ converge a 1. $x = 1$ es un punto de equilibrio estable. En cada caso, aparecen puntos que no son asintóticamente estables.

c) Si $x_0 < 0$ entonces $x(t)$ converge a 0. Si $x_0 > 0$ entonces $x(t)$ diverge.

3.11

a) Calculando la derivada con respecto a w, se obtiene que

$$\frac{d}{dw}\left(-\frac{u'}{u''}\right) = \frac{-\left(u''\right)^2 + u'u''}{(u'')^2} = -1 + \frac{u'u'''}{(u'')^2} = k - 1,$$



Esto implica que

$$-\frac{u'}{u''} = (k-1)w + A,$$

donde A es una constante arbitraria. Por lo que se tiene

$$\frac{-u''}{u'} = \frac{1}{A + (k-1)w}.$$

Podemos resolver la ecuación diferencial anterior. Si $k \neq 1$, obtenemos que

$$u'(w) = B\,(A + (k-1)w)^{-1/(k-1)}\,,$$

donde B es una constante arbitraria. Al integrar,

$$u(w) = \frac{B\,(A + (k-1)w)^{(k-2)/(k-1)}}{k-2} + C.$$

Si $k = 1$, obtenemos que

$$u(w) = -ABe^{-w/A} + C.$$

En cada caso, A, B y C son constantes arbitrarias.

b) $A, B > 0$ y $k \geq 0$.

c) Si $k = 0$ entonces

$$u(w) = \frac{B\,(A-w)^2}{-2} + C,$$

donde $A, B > 0$ y $0 < w \leq A$. Si u es una función CRRA, entonces necesariamente se tiene que la constante $A = 0$. Como $w > 0$ y además se cumple que $u' > 0$ y $u'' < 0$, entonces se tiene que $k > 1$.

3.12

a) Primero resolvemos para m y obtenemos $m(t) = m_0 + \mu t$. Al sustituir en (3.14) obtenemos

$$\dot{p}(t) = \frac{1}{1-\alpha\lambda}[(\mu + \alpha m_0 + \alpha\mu t) - \alpha p(t)].$$

La solución de la anterior es

$$p(t) = (m_0 + \mu\lambda + \mu t) + (p_0 - m_0 - \mu\lambda)\exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}t\right).$$

Además $\lim_{t\to\infty} p(t) = \infty$ y $\lim_{t\to\infty} \dot{p}(t) = \mu = \dot{m}$.

b) En el segundo caso se resuelve la ecuación

$$\dot{p}(t) = \frac{1}{\lambda}[p(t) - m(t)] = \frac{1}{\lambda}[p(t) - m_0 - \mu t].$$

La solución de la anterior es

$$p(t) = (m_0 + \mu\lambda + \mu t) + (p_0 - m_0 - \mu\lambda)\exp\left(\frac{1}{\lambda}t\right).$$

Además $\lim_{t\to\infty} p(t) = \lim_{t\to\infty} \dot{p}(t) = \infty$.

3.13

a) La ecuación para p^e es

$$\dot{p}^e = \frac{\alpha(1-\tau)d}{r-\alpha} - \left(\frac{\alpha r}{r-\alpha}\right)p^e.$$

Resolviendo se obtiene

$$p^e(t) = p^* + (p_0^e - p^*)\exp\left(\frac{-\alpha r t}{r-\alpha}\right),$$

donde

$$p^* = \frac{(1-\tau)d}{r}.$$

Por otro lado, $p(t) = \frac{1}{\alpha}\dot{p}^e(t) + p^e(t)$ y, por tanto,

$$p(t) = p^* - \frac{\alpha}{r-\alpha}(p_0^e - p^*)\exp\left(\frac{-\alpha r t}{r-\alpha}\right).$$

Además $\lim_{t\to\infty} p^e(t) = \lim_{t\to\infty} p(t) = p^*$.

b) Si τ aumenta inesperadamente a $\bar{\tau}$, entonces el valor del precio de equilibrio p^* pasa a un nuevo precio de equilibrio $\bar{p}^*$ que es menor a p^*. En el momento del cambio la derivada $\dot{p}(t)$ pasa de ser cero a ser negativo (el precio tiende a disminuir). Después $\dot{p}$ aumenta en el tiempo y el sistema procede asintóticamente hacia el nuevo equilibrio $\bar{p}^* < p^*$. El antiguo precio de equilibrio se puede considerar como condición inicial al tiempo T. Por lo tanto, la expresión para las soluciones a partir del instante T serían

$$p^e(t) = \bar{p}^* + (p^* - \bar{p}^*)\exp\left(\frac{-\alpha r(t-T)}{r-\alpha}\right),$$

$$p(t) = \bar{p}^* - \frac{\alpha}{r-\alpha}(p^* - \bar{p}^*)\exp\left(\frac{-\alpha r(t-T)}{r-\alpha}\right),$$

donde $t \geq T$ y $\bar{p}^* = (1-\bar{\tau})d/r$

c) La solución es

$$p(t) = \left[p_0 - \frac{(1-\tau)d}{r}\right]e^{rt} + \frac{(1-\tau)d}{r}.$$

d) El nivel de precios diverge a menos que al momento del aumento inesperado se tenga que $p(t) = \frac{(1-\bar{\tau})d}{r}$.

3.14

Si hacemos

$$f(P) = rP\left(1 - \frac{P}{C}\right) - E,$$

entonces podemos escribir

$$f(P) = -\frac{r}{C}P^2 + rP - E.$$

La función f es cuadrática y su gráfica es una parábola que abre hacia abajo. EL discriminante de la función es

$$\Delta = r^2 - \frac{4rE}{C} = r\left(r - \frac{4E}{C}\right).$$

El número de puntos fijos del sistema dinámico está relacionado con el signo de Δ. Tenemos tres casos.

- $E < Cr/4$. El discriminante Δ es positivo y por lo tanto la función f tiene dos raíces. Es decir, el sistema tiene dos puntos fijos y la dinámica se divide en tres intervalos. En dos de ellos P decrece y en uno crece.
- $E = Cr/4$. El discriminante Δ es cero y por lo tanto la función f tiene una raíz. El sistema tiene un sólo punto fijo y la dinámica se divide en dos intervalos. En ambos, P decrece.
- $E > Cr/4$. El discriminante Δ es negativo y por lo tanto la función f no tiene raíces. La función P siempre decrece.

3.15

Se tiene la siguiente ecuación.

$$\dot{P} = f(P) = g(\alpha - \delta P - \gamma P + \beta).$$

Notemos que

$$f'(P) = g'(\alpha - \delta P - \gamma P + \beta)(\delta - \gamma).$$

Esto implica que

$$f(P^*) = g(0) = 0, \qquad f'(P^*) = g'(0)(\delta - \gamma) < 0.$$

Por el teorema 3.3.1, el punto P^* es asintóticamente estable.