Soluciones del capítulo 4
Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Héctor Lomelí y Beatriz Rumbos

18 de marzo de 2010

4.1

a) $X(t) = C_1\, e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\, e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) $X(t) = C_1\, e^{\left(2+\sqrt{3}\right)t} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + C_2\, e^{\left(2-\sqrt{3}\right)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

c) $X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\, e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

d) $X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\, e^{t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.2

a) $X(t) = C_1\, e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2\, e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$.

b) $X(t) = C_1\, e^{3t} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2\, e^{3t} \begin{pmatrix} 4t \\ 1-2t \end{pmatrix}$.

c) $X(t) = C_1\, e^{t} \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} + C_2\, e^{t} \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix}$.

d) $X(t) = C_1\, e^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2\, e^{3t} \begin{pmatrix} -t \\ 1-2t \end{pmatrix}$.

4.3

a) $X(t) = C_1\, e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\, e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $X(t) = C_1\, e^{-\frac{3}{2}t} \begin{pmatrix} 2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix} + C_2\, e^{-\frac{3}{2}t} \begin{pmatrix} 2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

c) $X(t) = C_1\, e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} e^{t} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

4.4

a) $X(t) = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, $\lim_{t\to\infty} X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $X(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\beta t \\ \sin\beta t \end{pmatrix}$.

c) $X(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{t} \begin{pmatrix} 5\cos t + 15\sin t \\ 20\cos t + 10\sin t \\ 30\cos t - 10\sin t \end{pmatrix}$.

4.5

a) $X(t) = (2+w)e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-w)e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

b) $w = -2$.

4.6

a) Se necesita que $\mathrm{tr}A = a + d = 0$ y que $\det A = ad - cb \leq 0$.

b) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1\, e^{\omega t} \begin{pmatrix} b \\ \omega - a \end{pmatrix} + C_2\, e^{-\omega t} \begin{pmatrix} b \\ -\omega - a \end{pmatrix}$, con $\omega = \sqrt{-\det(A)} = \sqrt{bc - ad}$.

4.7

a) $X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\, e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) $\lim_{t\to\infty} X(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} C_1$.

4.8

$$X(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1\, e^{t} \begin{pmatrix} 5\cos t + \sin t \\ 12\cos t + 2\sin t \\ 4\cos t \end{pmatrix} + C_2\, e^{t} \begin{pmatrix} 5\sin t - \cos t \\ 12\sin t - 2\cos t \\ 4\sin t \end{pmatrix}.$$

4.9

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.10

a) El conjunto $\{w_1(t), w_2(t), \ldots, w_n(t)\}$ es linealmente independiente para todo tiempo t. Por lo tanto las columnas de $\Phi(t)$ son linealmente independientes, de modo que existe la inversa $\Phi^{-1}(t)$.

b) Cada w_1 con $i = 1, 2, \ldots, n$ es solución de la ecuación $\dot{X} = AX$, por lo que $\dot{w}_i = Aw_i$. Así, $\dot{\Phi}(t) = (\dot{w}_1, \dot{w}_2, \ldots, \dot{w}_n) = (Aw_1, Aw_2, \ldots, Aw_n) = A(w_1, w_2, \ldots, w_n) = A\Phi(t)$.

c) Sea $Y(t) = \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds$. Entonces $\Phi^{-1}(t)Y(t) = \int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds$. Por otra parte, $\dot{Y}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t)f(t) + \dot{\Phi}(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds = f(t) + \dot{\Phi}(t)\Phi^{-1}(t)Y(t) = f(t) + A\Phi(t)\Phi^{-1}(t)Y(t) = f(t) + AY(t)$. Por lo tanto $Y(t)$ es una solución particular de $\dot{X}(t) = AX(t) + f(t)$.

4.11

Sea el sistema $\dot{X} = AX$ con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{m-2} & -a_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico esta dado por

$$p_A(\lambda) = |A - I\lambda| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{m-2} & -a_{m-1} - \lambda \end{vmatrix}$$

Si $\lambda \neq 0$, entonces

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ 0 & -\left(a_1 + \frac{a_0}{\lambda}\right) & -a_2 & \dots & -a_{m-2} & -a_{m-1} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \left(a_2 + \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_0}{\lambda^2}\right) & \dots & -a_{m-2} & -a_{m-1} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \dots = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\left(\lambda + a_{m-1} + \frac{a_{m-2}}{\lambda} + \dots + \frac{a_1}{\lambda^{m-2}} + \frac{a_0}{\lambda^{m-1}}\right) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= -(-\lambda)^{m-1}\left(\lambda + a_{m-1} + \frac{a_{m-2}}{\lambda} + \dots + \frac{a_1}{\lambda^{m-2}} + \frac{a_0}{\lambda^{m-1}}\right) \\ &= (-1)^m(\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + a_1\lambda + a_0). \end{aligned}$$

Si $\lambda = 0$, la igualdad también se cumple. Por lo tanto, la ecuación característica del sistema es $\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$.

4.12

Sea λ_k un vector propio de la matriz A del problema anterior. Entonces un vector $\mathbf{v}_k = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{m-1} \end{pmatrix}$ es un vector propio de A asociado a λ_k si y solo si satisface el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} -\lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_k & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda_k & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{m-2} & -a_{m-1} - \lambda_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

El último renglón es una combinación lineal de los demás. Entonces basta que para cada $i = 1, 2, \dots m-1$ se cumpla $v_i = \lambda_k v_{i-1}$, o lo que es lo mismo $v_i = \lambda_k^i v_0$. Es decir, vectores de la forma

$$\mathbf{v}_k = \begin{pmatrix} v_0 \\ \lambda_k v_0 \\ \lambda_k^2 v_0 \\ \vdots \\ \lambda_k^{m-1} v_0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{v}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_k \\ \lambda_k^2 \\ \vdots \\ \lambda_k^{m-1} \end{pmatrix}$$

es un vector propio de A asociado a λ_k.

4.13

a) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1\, e^{-\frac{4}{10}t} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2\, e^{-\frac{11}{10}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2500 \\ 1625 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1\, e^{-\frac{4}{10}t} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2\, e^{-\frac{11}{10}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} e^{\frac{t}{10}} \begin{pmatrix} 17 \\ 19 \end{pmatrix}$.

4.14

a) $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $x(t) = C_1\, e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$.

4.15

Si $t = e^w$ entonces $w = \ln t$. Por lo tanto $\frac{dw}{dt} = \frac{1}{t} = e^{-w}$. Lo que implica que $t\frac{dx}{dt} = e^w \frac{dx}{dw}\frac{dw}{dt} = \frac{dx}{dw} e^w e^{-w} = \frac{dx}{dw}$. De forma similar $t\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dw}$. Entonces el sistema se convierte en $\dot{x}(w) = a_1 x(w) + b_1 y(w), \quad \dot{y}(w) = a_2 x(w) + b_2 y(w)$.

4.16

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1\, t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\, t^4 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

4.17

a) Sean $\lambda_1 \neq \lambda_2$ dos valores propios distintos y sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \neq 0$ vectores propios correspondientes. Sean C_1 y C_2 constantes tales que $C_1\,\mathbf{v}_1 + C_2\,\mathbf{v}_2 = 0$. Entonces $A(C_1\,\mathbf{v}_1 + C_2\,\mathbf{v}_2) = C_1\,\lambda_1\mathbf{v}_1 + C_2\,\lambda_2\mathbf{v}_2 = 0$. Por otra parte

$$\lambda_1(C_1\,\mathbf{v}_1 + C_2\,\mathbf{v}_2) = C_1\,\lambda_1\mathbf{v}_1 + C_2\,\lambda_1\mathbf{v}_2 = 0.$$

Restando ambas ecuaciones $C_2\,(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{v}_2 = 0$. Lo que implica $C_2 = 0$. De forma similar $C_1 = 0$. Por lo tanto $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente independientes.

b) Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ valores propios distintos y $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores propios correspondientes. Para demostrar pos inducción matemática se supone que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\}$ son linealmente independientes. Sean $C_1\,, C_2\,, \ldots, c_{n-1}$ constantes tales que $\sum_{i=1}^{n-1} c_i\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_n$. Entonces

$$A\left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i\mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i\lambda_i\mathbf{v}_i = \lambda_n\mathbf{v}_n.$$

Por otra parte

$$\lambda_n\left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i\mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i\lambda_n\mathbf{v}_i = \lambda_n\mathbf{v}_n.$$

Restando ambas ecuaciones $\sum_{i=1}^{n-1} c_i(\lambda_n - \lambda_i)\mathbf{v}_i = 0$. Lo que implica $C_1 = C_2 = \ldots = c_n = 0$. Por lo tanto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ son también linealmente independientes.

4.18

a) $x(t) = (\cos t + \sin t)e^{-t}$. Además, $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

b) $x(t) = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}e^{3t}$. Además, $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \infty$.

c) $x(t) = \frac{4}{7}e^{t} - \frac{11}{7}e^{-6t}$. Además, $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \infty$.

d) $x(t) = (1 + 2t)e^{-t}$. Además, $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

e) $x(t) = (1 - 2t)e^{2t}$. Además, $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = -\infty$.

f) $x(t) = -4e^{-2t} + \frac{8}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3}$. Además, $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \dfrac{1}{3}$.

4.19

a) $y(x) = \left(\frac{u+w}{2}\right)e^{-x} + \left(\frac{u-w}{2}\right)\cos x + \left(\frac{u+2v+w}{2}\right)\sin x$.

b) Si $w = u$ y $v = -u$ entonces se tiene que $y(x) = ue^{-x}$. Por lo tanto $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$.

4.20

$y(t) = \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{4}{5}e^{t}\cos t - \frac{2}{5}e^{t}\sin t$. Además $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$ no esta definido ya que la función oscila.

4.21

a) $y(x) = \left(\frac{2v-2u-1}{-5}\right) e^{-x} + \left(\frac{2v+3u-1}{5}\right) e^{x} \cos x + \left(\frac{2v-2u+4}{10}\right) e^{x} \sin x.$

b) Si $u = 1$ y $v = -1$ entonces $y(x) = e^{-x}$. Por lo tanto $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

4.22

$y(t) = \frac{1}{4}e^{t} - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\sin t$

4.24

En cada uno de los incisos, se demostrará que la función propuesta es una solución del problema lineal. Sea A una matriz de 2×2. El polinomio característico de A es

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

Por el teorema de Cayley-Hamilton, se cumple la siguiente igualdad

$$p_A(A) = A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I = 0.$$

a) Si A tiene dos valores propios reales y distintos λ_1, λ_2, entonces el polinomio característico se puede escribir como:

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$

Esto implica que

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = 0.$$

Por tanto, si definimos

$$M_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(A - \lambda_2 I)$$

y

$$M_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(A - \lambda_1 I),$$

entonces se cumple que $M_1 + M_2 = I$ y $M_1\, M_2 = M_2\, M_1 = 0$. Además, $AM_1 = \lambda_1 M_1$ y $AM_2 = \lambda_2 M_2$. Si

$$X(t) = \left[e^{\lambda_1 t} M_1 + e^{\lambda_2 t} M_2\right] x_0,$$

entonces

$$\dot{X}(t) = \left[e^{\lambda_1 t}\lambda_1 M_1 + e^{\lambda_2 t}\lambda_2 M_2\right] x_0.$$

Por otra parte,

$$AX(t) = \left[e^{\lambda_1 t} AM_1 + e^{\lambda_2 t} AM_2\right] x_0 = \left[e^{\lambda_1 t}\lambda_1 M_1 + e^{\lambda_2 t}\lambda_2 M_2\right] x_0 = \dot{X}(t).$$

Finalmente, al sustituir $t = 0$, verificamos que $X(0) = [M_1 + M_2]\, x_0 = x_0$.

b) Si A tiene un valor propio repetido λ, entonces

$$(A - \lambda I)^2 = 0.$$

Por tanto, si definimos

$$M = A - \lambda I$$

se cumple que $AM = \lambda M$ y $M + \lambda I = A$. Si

$$X(t) = e^{\lambda t}\,[I + tM]\, x_0,$$

entonces

$$\dot{X}(t) = e^{\lambda t}\,[\lambda I + \lambda t M + M]\,x_0 = e^{\lambda t}\,[A + \lambda t M]\,x_0.$$

Por otra parte,

$$AX(t) = e^{\lambda t}\,[A + t\,AM]\,x_0 = e^{\lambda t}\,[A + \lambda t M]\,x_0.$$

Finalmente, al sustituir $t = 0$, verificamos que $X(0) = x_0$.

c) Si A tiene un par valores propios complejos conjugados $\alpha \pm \beta i$ entonces el polinomio característico se puede escribir como:

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2 + \beta^2.$$

Esto implica que

$$(A - \alpha I)^2 + \beta^2 I = 0.$$

Por tanto, si definimos $M = A - \alpha I$, tendríamos que $M^2 = -\beta^2 I$ y por tanto, $AM = \alpha M - \beta^2 I$. Si

$$X(t) = e^{\alpha t}\left[\cos\beta t\; I + \frac{\sin\beta t}{\beta} M\right] x_0,$$

entonces

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= e^{\alpha t}\left[\cos\beta t\;(\alpha I + M) + \frac{\sin\beta t}{\beta}(\alpha M - \beta^2 I)\right] x_0,\\ &= e^{\alpha t}\left[\cos\beta t\; A + \frac{\sin\beta t}{\beta} AM\right] x_0,\end{aligned}$$

Esto implica que $\dot{X}(t) = A\,X(t)$. Finalmente, al sustituir $t = 0$, verificamos que $X(0) = x_0$.