Soluciones del capítulo 5
Análisis cualitativo

Héctor Lomelí y Beatriz Rumbos

9 de mayo de 2011

5.1

Ver figura 1 para los diagramas de fase.

a) $P^* = (0,0)$ es punto silla.

b) $P^* = (0,0)$ es espiral atractora.

c) $P^* = (0,0)$ es espiral repulsora.

d) $P^* = (0,0)$ es nodo repulsor.

e) $P^* = \left(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$ es punto silla.

5.2

Ver figura 2 para los diagramas de fase.

a) $P^* = (0,0)$ es punto silla.

b) $P^* = (0,0)$ es degenerado inestable.

c) $P^* = (0,0)$ es centro degenerado.

d) Todos los puntos de la forma $P^* = (-3b, b)$ son fijos y cada uno de ellos es degenerado.

e) $P^* = \left(\frac{9}{4}, -\frac{9}{2}\right)$ es espiral repulsora.

5.3

a) $P^* = (0,0,0)$ es punto degenerado.

b) $P^* = (0,0,0)$ es nodo repulsor.

c) $P^* = (0,0,0)$ es degenerado.

d) $P^* = (-4,1,1)$ es nodo repulsor.

5.4

Ver figura 3 para los diagramas de fase.

a) Hay cuatro puntos fijos. $P_1^* = (0,0)$ es nodo repulsor. $P_2^* = (0,6)$ es nodo atractor. $P_3^* = (2,0)$ es punto silla. $P_4^* = (4,-2)$ es espiral atractora. Sea (x_0, y_0) la condición inicial. Del diagrama de fase se puede ver que si $x_0 \geq 0$ y $y_0 > 0$ entonces $\lim_{t\to\infty} (x(t), y(t)) = (0,6)$. Es decir, que la población x se extinguirá y la población y tenderá a 6. No es posible que las dos poblaciones coexistan en el largo plazo.

b) Hay cuatro puntos fijos. $P_1^* = (0,0)$ es nodo repulsor. $P_2^* = (0,2)$ es punto silla. $P_3^* = (3,0)$ es nodo atractor. $P_4^* = (4,-2)$ es punto silla. Sea (x_0, y_0) la condición inicial. Del diagrama de fase se puede ver que si $y_0 \geq 0$ y $x_0 > 0$ entonces $\lim_{t\to\infty} (x(t), y(t)) = (3,0)$. Es decir, que la población x se tenderá a 3 y la población y se extinguirá. No es posible que las dos poblaciones coexistan en el largo plazo.

c) Hay cuatro puntos fijos. $P_1^* = (0,0)$ es nodo repulsor. $P_2^* = (2,0)$ es nodo atractor. $P_3^* = (0,3)$ es nodo atractor. $P_4^* = (1,1)$ es punto silla. Sea (x_0, y_0) la condición inicial. Del diagrama de fase se puede ver que si $x_0 \geq 0$ y $y_0 \geq 0$ entonces el límite $\lim_{t\to\infty} (x(t), y(t))$ depende del punto inicial. Sea $W^s(P_4^*)$ la variedad estable del punto silla P_4^*. Resulta que $W^s(P_4^*)$ es una curva en el plano y separa el espacio fase. Si la condicción inicial está sobre la curva, la solución tenderá a P_4^*. Por encima de la curva, las soluciones tenderán al punto P_3^* y por debajo, al punto P_2^*. Es posible que las dos poblaciones coexistan en el largo plazo, pero bajo circunstancias muy especiales: sólo para aquellos puntos que inician sobre la variedad estable.

c) Hay cuatro puntos fijos. $P_1^* = (0,0)$ es nodo repulsor. $P_2^* = (3/2,0)$ es punto silla. $P_3^* = (0,2)$ es punto silla. $P_4^* = (1,1)$ es nodo atractor. Sea (x_0, y_0) la condición inicial. Del diagrama de fase se puede ver que si $x_0 > 0$ y $y_0 > 0$ entonces el límite $\lim_{t\to\infty} (x(t), y(t)) = (1,1)$. Por lo tanto, es posible que las dos poblaciones coexistan en el largo plazo. Si ambas pobalciones iniciales no son nulas, entonces el límite se aproxima a P_4^*.

5.5

Los puntos fijos son: $(0,0), (1,0), (0,3)$, y $(10/3, 14/3)$. Al calcular la matriz jacobiana obtenemos

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 2-4x+y & x \\ y & 6+x-4y \end{pmatrix}.$$

De aquí que:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},$$

valores propios: $0, 6$ ambos reales y positivos por lo que $(0,0)$ es nodo inestable.

$$J(1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix},$$

valores propios $-2, 7$ reales y de signos opuestos por lo que $(1,0)$ es punto silla. La trayectoria estable va en la dirección del vector propio correspondiente a -2 o bien $(1,0)$. Por otra parte,

$$J(0,3) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -6 \end{pmatrix},$$

que tiene valores propios 5 y -6 por lo que $(0,3)$ es punto silla. La trayectoria estable va en la dirección del vector propio correspondiente a -6 o bien $(0,1)$. Finalmente,

$$J\left(\frac{10}{3}, \frac{14}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{20}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{14}{3} & -\frac{28}{3} \end{pmatrix},$$

Por lo que $(10/3, 14/3)$ es nodo estable.

El término "simbiosis" se refiere a la interacción a largo plazo de poblaciones que conviven cercanamente. Por ejemplo, el ser humano convive en simbiosis con el mundo de los microrganismos, que incluye a todas las bacterias. Las unidades económicas también "conviven" en relaciones simbióticas. Las especies que conviven en simbiosis pueden ayudarse entre sí (mutualismo) o bien una especie puede aprovechar, unilateralmente, los recursos de la otra (comensalismo) e inclusive destruirlos (parasitismo). En el problema anterior, si la cantidad inicial de una especie es nula, entonces la otra especie se estabiliza en una cantidad positiva de individuos (los puntos silla (1,0) y (0,3)). Si la cantidad inicial de individuos de cada especie es no nula, entonces siempre se converge hacia el nodo estable $(\frac{10}{3}, \frac{14}{3})$ en una relación mutualista. Ver figura **??** para el diagrama de fase.

5.6

a) La matriz Jacobiana es

$$J(P,N) = \begin{pmatrix} 1-2P-\gamma N & -\gamma P \\ \gamma N & -1+\gamma P \end{pmatrix}$$

por lo que

$$J(1,0) = \begin{pmatrix} -1 & -\gamma \\ 0 & -1+\gamma \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es $1-\gamma < 0$. Se tiene que $(1,0)$ es punto silla. Los valores propios son -1 y $-1+\gamma$. El vector propio correspondiente a -1 es el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y el correspondiente a $-1+\gamma$ es el vector $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, éstos representan, respectivamente las direcciones estable e inestable.

b) Como γNP es el número de encuentros depredador-presa por unidad de tiempo, γ representa la tasa de encuentros entre depredadores y presas, ésta influye positivamente en la población de depredadores y negativamente en las presas.

c) Adicionalmente a $(1,0)$, existen los siguientes puntos fijos: $(0,0)$ y $\left(\frac{1}{\gamma}, \frac{\gamma-1}{\gamma^2}\right)$. Se tiene que

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tiene valores propios 1 y -1 por lo que $(0,0)$ es punto silla. Asimismo,

$$J\left(\frac{1}{\gamma}, \frac{\gamma-1}{\gamma^2}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\gamma} & -1 \\ \frac{\gamma-1}{\gamma} & 0 \end{pmatrix}$$

tiene valores propios

$$-\frac{1}{2\gamma} \pm \frac{1}{2\gamma}\sqrt{-4\gamma^2+4\gamma+1}.$$

Estos valores pueden ser reales o complejos, sin embargo dado que la traza es negativa el punto $\left(\frac{1}{\gamma}, \frac{\gamma-1}{\gamma^2}\right)$ es atractor (espiral, degenerado o nodo). El discriminante en este caso es $D = -4\gamma^2 + 4\gamma + 1$. El signo de D distingue entre espirales, nodos o caso degenerado. Si sólo consideramos valores $\gamma > 1$ entonces la parábola $-4\gamma^2 + 4\gamma + 1$ cruza el eje en el punto

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1.20710678;$$

por lo tanto, si $\gamma > \alpha$ se tiene un nodo atractor, si $\gamma < \alpha$ se tiene una espiral atractora y $\gamma = \alpha$ se tiene un punto degenerado.

5.7

a) El sistema tiene un punto fijo en $(1,a)$. El jacobiano en este punto fijo es

$$J = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & -b \end{pmatrix}$$

Se define por "comportamiento cíclico" aquel en el cual las variables oscilan. Esto es, si se tiene un centro. Esto ocurre si la traza es cero y el deteminante es positivo. Es decir, se obtiene comportamiento cíclico si $a = b$ y $ab < 1$.

b) El sistema es estable si el punto fijo es nodo atractor o espiral atractora. Para esto necesitamos: traza negativa, determinante positivo y discriminate no-nulo. Después de un poco de álgebra se puede ver qu necesitamos que se cumpla $a < b$, $ab < 1$ y $a + b \neq 2$.

5.8

El punto fijo esta dado por $\begin{pmatrix} w^* \\ p^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$. La solución del sistema es

$$\begin{pmatrix} w(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} A \\ AB + C \end{pmatrix} e^{-\lambda t}$$

donde $\lambda = A - a(AB + C)$. Además $\lim_{t\to\infty} \begin{pmatrix} w(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, los puntos fijos son múltiplos del vector $\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$ y son degenerados.

5.9

Ver figura 5 para los diagramas de fase.

a) Los puntos fijos son $P_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $P_2^* = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$. P_1^* es nodo repulsor y P_2^* es punto silla.

b) Los puntos fijos son $P_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $P_2^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. P_1^* es punto silla y P_2^* es centro.

c) Los puntos fijos son $P_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_3^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $P_4^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. P_1^*, P_2^* y P_3^* son puntos silla y P_4^* es centro.

5.10

a) $P^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es punto silla porque los valores propios son: $\lambda_1 = \alpha + \beta > 0$ y $\lambda_2 = \alpha - \beta < 0$.

b) El espacio estable es $E^s(P^*) = \text{gen}\{(1, \alpha + \beta)\}$. y el inestable es $E^u(P^*) = \text{gen}\{(1, \alpha - \beta)\}$.

5.11

El único punto fijo es $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. El jacobiano del sistema es

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -3x^2 - y^2 & -1 - 2xy \\ 1 - 2xy & -x^2 - 3y^2 \end{pmatrix},$$

por lo que $J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces los valores propios del jacobiano en el punto fijo son $\lambda_{1,2} = \pm i$ que son raíces complejas con parte real igual a 0. Esto quiere decir que el punto fijo es degenerado. Usaremos coordenadas polares

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t)\cos\theta(t), \\ y(t) &= r(t)\sin\theta(t). \end{aligned} \tag{1}$$

para encontrar una expresión explícita de la solución. Sean (r_0, θ_0) números tales que

$$\begin{aligned} x_0 &= r_0 \cos\theta_0, \\ y_0 &= r_0 \sin\theta_0. \end{aligned}$$

donde $r_0 \geq 0$. En particular, $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$.

Tenemos las ecuaciones:

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{r^2} = \frac{\left[x - y(x^2+y^2)\right] x - \left[-y - x(x^2+y^2)\right] y}{r^2} = 1$$

y

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} = \frac{x\left[-y - x(x^2+y^2)\right] + y\left[x - y(x^2+y^2)\right]}{r} = -r^3.$$

Al resolver el sistema anterior con condiciones $r(0) = r_0$ y $\theta(0) = \theta_0$ obtenemos

$$\theta(t) = \theta_0 + t,$$

y

$$r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{1 + 2r_0^2 t}}.$$

Si usamos las ecuaciones (1), obtenemos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r(t)\cos\theta(t) \\ r(t)\sin\theta(t) \end{pmatrix} = \frac{r_0}{\sqrt{1+2r_0^2 t}} \begin{pmatrix} \cos(\theta_0 + t) \\ \sin(\theta_0 + t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+2r_0^2 t}} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0\cos(\theta_0) \\ r_0\sin(\theta_0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+2(x_0^2+y_0^2)t}} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ entonces $\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = (0,0)$. Concluimos que el origen es un punto asintóticamente estable.

5.12

a) El único punto fijo es $(k^*, p^*) = \left(\frac{I(p^*)}{\delta}, \frac{f'(k^*)}{r+\delta}\right)$. El jacobiano del sistema es

$$J(k,p) = \begin{pmatrix} -\delta & I'(p) \\ -f''(k) & r+\delta \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es negativo: $\Delta = -r\delta - \delta^2 + I'(p)f''(k) < 0$. Por lo tanto, (k^*, p^*) se trata de un punto silla. Si $k_0 < k^*$, entonces es positiva y mayor a δk_0 y decrece hasta aproximarse al equilibrio; de esta forma, el capital aumenta a tasa decreciente hasta el límite k^* .

b) La tasa de convergencia está dada por

$$\lambda = \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - 4\left(-\delta(r+\delta) + f''(k^*)I'(p^*)\right)}.$$

Además $\lim_{r\to\infty} \lambda = -\delta$.

5.13

Los valores propios de la matriz son $\lambda_1 = -3$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm i$, por lo que el punto fijo es de tipo silla. El espacio lineal estable es

$$E^s(P^*) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

que representa una recta. Su espacio lineal inestable es

$$E^u(P^*) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

que representa un plano.

5.14

Podemos utilizar una función auxiliar que definimos como $p(t) = \dot{y}(t)$. Por tanto, nos queda un sistema de primer orden con dos incógnitas.

$$\begin{aligned} \dot{y} &= p, \\ \dot{p} &= 2\sin(2y). \end{aligned}$$

La idea del problema es identificar la variedad estable $W^s(0,0)$. Por la regla de la cadena

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\dot{p}}{\dot{y}} = \frac{2\sin(2y)}{p},$$

que es una ecuación separable. Al resolver, se obtiene que las soluciones $(y(t), p(t))$ de la ecuación deben satisfacer

$$\frac{p(t)^2}{2} + \cos(2y(t)) = C,$$

donde C es una constante por determinar. Al sustituir $t = 0$ obtenemos que $C = \frac{v^2}{2} + \cos(2u)$. Por otra parte, al tomar el límite $t \to \infty$ se concluye que $C = 1$. Es decir, una condición necesaria para que cumpla el límite es que $\frac{v^2}{2} + \cos(2u) = 1$.

Por tanto, con un poco de álgebra, se puede ver que la variedad estable está contenida en el conjunto $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : v^2 = 4\sin^2 u\}$. Esto implica que si $(u,v) \in W^s(0,0)$ entonces $v = \pm 2\sin u$.

Al linearizar en $(0,0)$ se obtiene que el espacio estable es $E^s(0,0) = \text{gen}\{(-2,1)\}$ y por tanto

$$W^s(0,0) \subset \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : v = -2\sin u\}.$$

Al graficar el espacio fase, esto se confirma y además se observa que

$$W^s(0,0) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : v = -2\sin u, -\pi < u < \pi\}.$$

Ver figura 6 para el diagrama de fase.

5.15

Ver figura 7 para el diagrama de fase.

a) Los puntos fijos son $P_1^* = (0,1)$, $P_2^* = (0,-1)$, $P_3^* = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ y $P_4^* = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$. P_3^* y P_4^* son puntos fijos degenerados de tipo centro. P_1^* y P_2^* son puntos sillas. Para P_1^* se tiene

$$E^s(P_1^*) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \{(x,y)|x=0\}$$

y

$$E^u(P_1^*) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \{(x,y)|y=0\}.$$

Para P_2^* se tiene

$$E^s(P_2^*) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \{(x,y)|x=0\}$$

y

$$E^u(P_1^*) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \{(x,y)|y=0\}.$$

b) Por la regla de la cadena

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1-3x^2-y^2}{2xy} = \frac{1-3x^2}{2xy} - \frac{y^2}{2xy} = \left(\frac{1-3x^2}{2x}\right)y^{-1} - \frac{1}{2x}y,$$

que es una ecuación de Bernoulli con $n=-1$.

c) $x(y^2+x^2-1) = x_0(y_0^2+x_0^2-1)$.

d) De la linealización cerca de cada punto fijo, la expresión obtenida en el inciso anterior y el diagrama de fase se obtiene lo siguiente:

$$W^s(P_1^*) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x=0,\, y>-1\},$$
$$W^u(P_2^*) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x=0,\, y<1\},$$
$$W^u(P_1^*) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1,\, y>-1\},$$
$$W^s(P_2^*) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1,\, y<1\}.$$

5.16

a) El unico punto fijo del sistema es $p^* = \begin{pmatrix} 1 \\ e \end{pmatrix}$ y es un punto silla.

b) Sus espacios lineales son

$$E^s(p^*) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \{(x,y)|x=0\}$$

y

$$E^u(p^*) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ e \end{pmatrix}\right\} = \{(x,y)|y=ex\}.$$

c) Resolviendo la ecuación lineal correspondiente, se obtiene

$$y(x) = e^x + \frac{c}{x-1},$$

donde c es una constante. Por tanto, las soluciones $(x(t), y(t))$ del sistema satisfacen

$$(x(t)-1)(y(t)-e^{x(t)}) = c,$$

para todo tiempo t.

d) Las curvas estables e inestables son

$$W^s(P^*) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$$

y

$$W^u(P^*) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^x\}.$$

5.17

a) Sean $y(t) = 0$ y $x(t) = x_0 - \ln(e^{x_0} + (1-e^{x_0})e^{-t})$. Entonces $\dot{y}(t) = 0$ y

$$\dot{x}(t) = \frac{(1-e^{x_0})e^{-t}}{e^{x_0} + (1-e^{x_0})e^{-t}}.$$

Al sustituir obtenemos, por una parte $ye^x = 0 = \dot{y}$ y por otra

$$y(t) + 1 - e^{x(t)} = 1 - e^{x_0} e^{\ln(e^{x_0}+(1-e^{x_0})e^{-t})^{-1}} = 1 - \frac{e^{x_0}}{e^{x_0} + (1-e^{x_0})e^{-t}} = \dot{x}(t).$$

Además $x(0) = x_0 - \ln(e^{x_0} + 1 - e^{x_0}) = x_0$ y $y(0) = 0$. Entonces $(x(t), y(t))$ es una solución del sistema.

b) Sean $x(t) = x_0 - \ln(e^{x_0} + (1-e^{x_0})e^{t})$ y $y(t) = 2(e^{x(t)} - 1)$. Al derivar x se tiene que

$$\dot{x}(t) = \frac{-(1-e^{x_0})e^{t}}{e^{x_0} + (1-e^{x_0})e^{t}}.$$

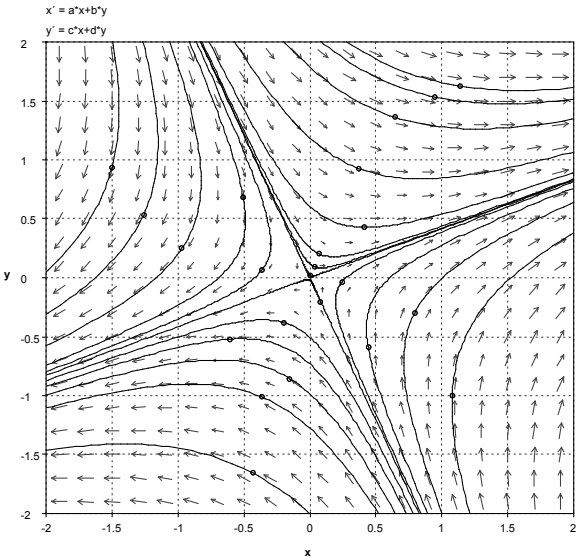
Al sustituir se verifica que

$$y(t) + 1 - e^{x(t)} = e^{x(t)} - 1 = e^{x_0} e^{\ln(e^{x_0}+(1-e^{x_0})e^{t})^{-1}} - 1 = \dot{x}(t).$$

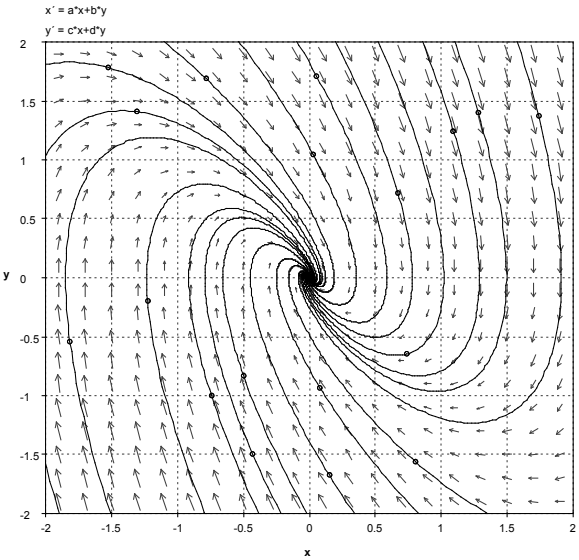
Por otra parte,

$$\dot{y} = 2e^x \dot{x} = 2e^x(y + 1 - e^x) = ye^x.$$

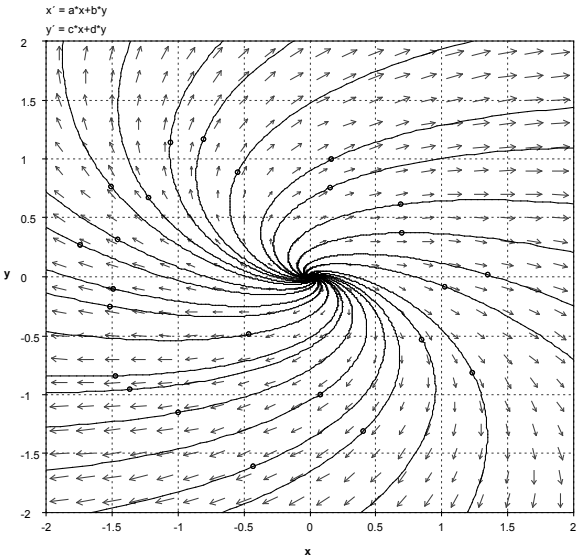
Además $x(0) = x_0$ y $y(0) = 2(e^{x_0} - 1) = y_0$. Concluimos que $(x(t), y(t))$ es una solución del sistema.



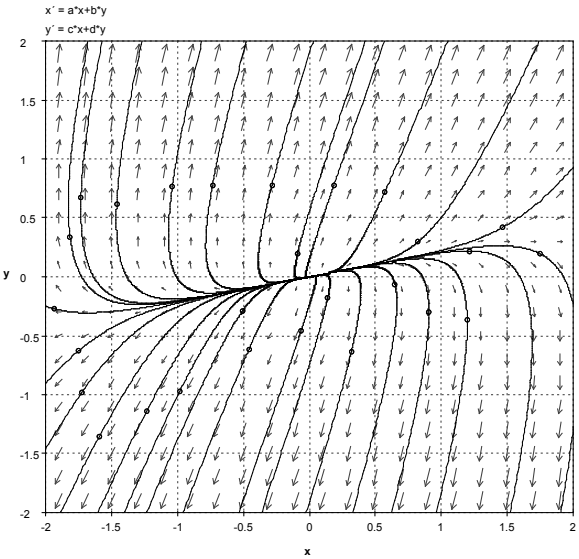
(a)



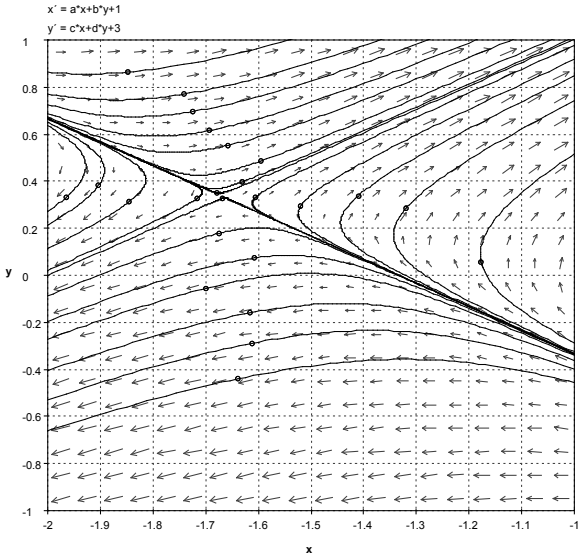
(b)



(c)

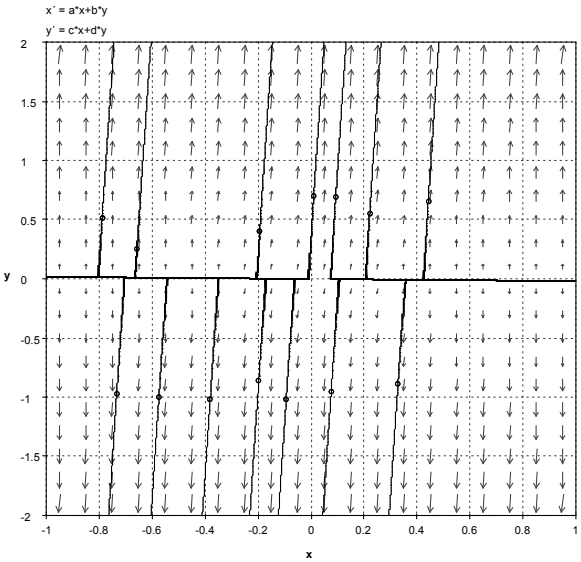


(d)

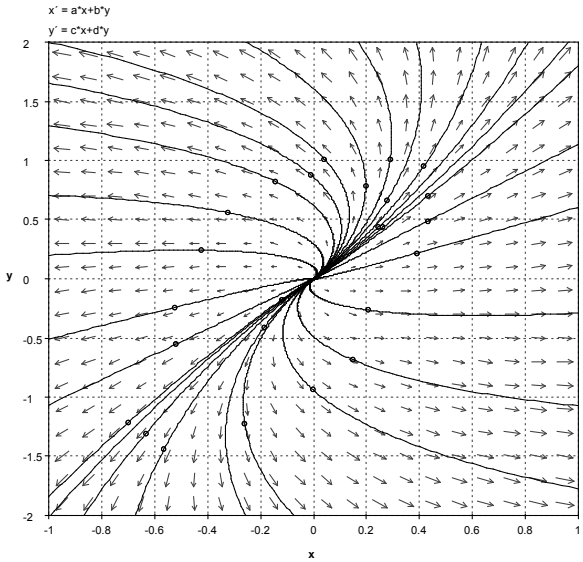


(e)

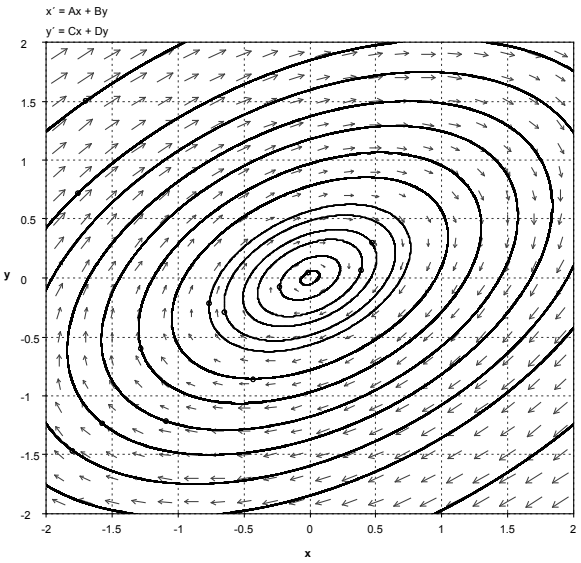
Figura 1: Diagramas de fase para el problema 5.1



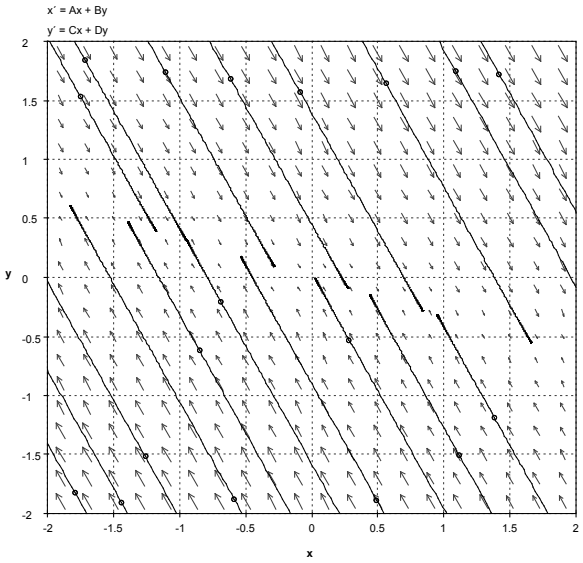
(a)



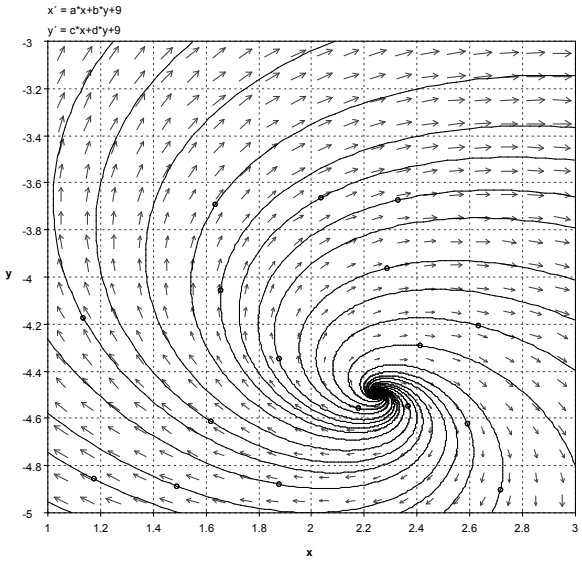
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 2: Diagramas de fase para el problema 5.2

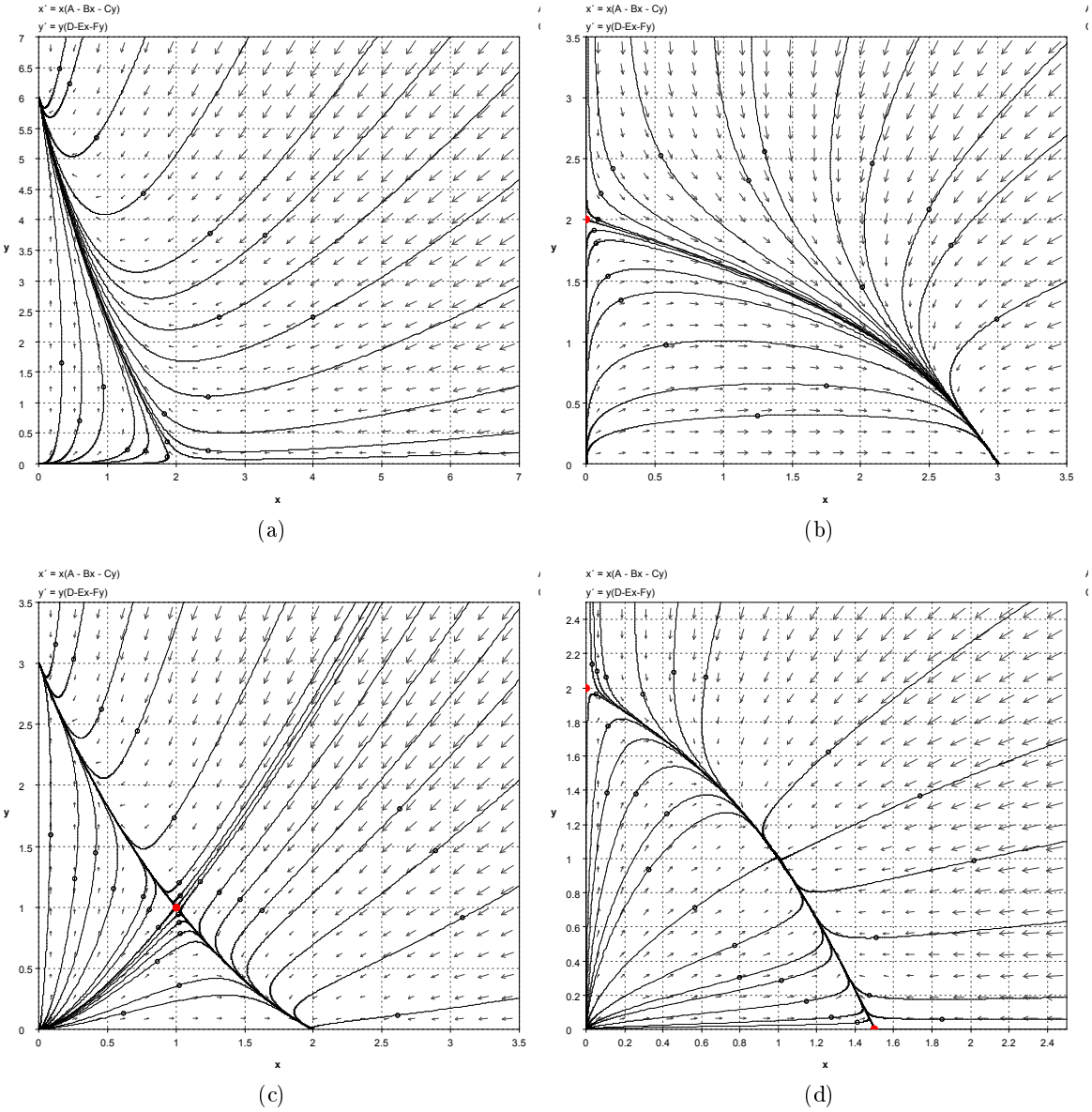
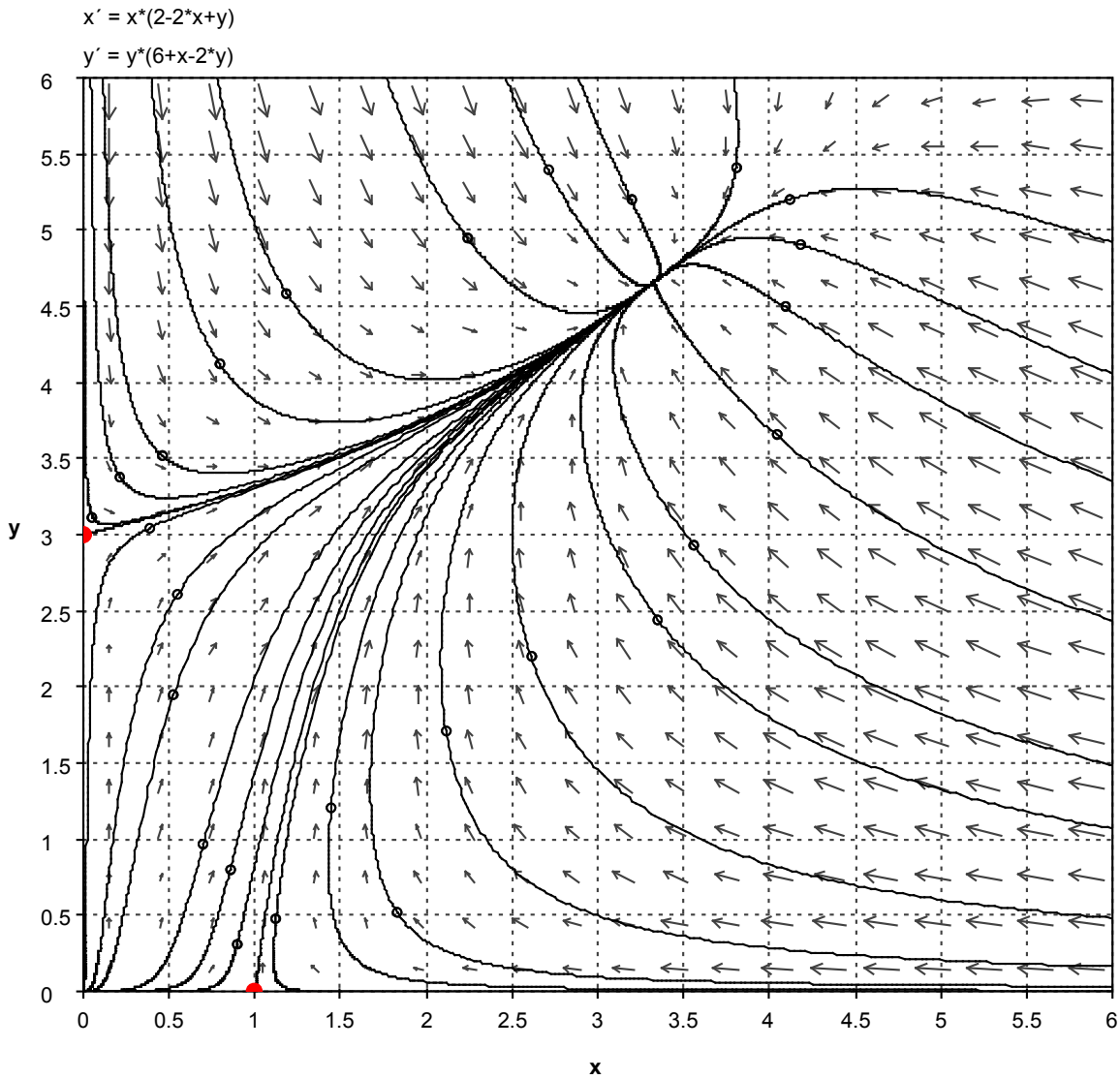
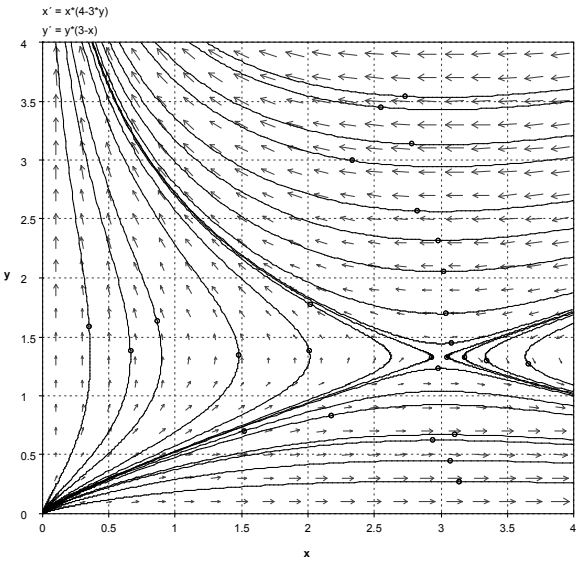


Figura 3: Diagramas de fase para el problema 5.4

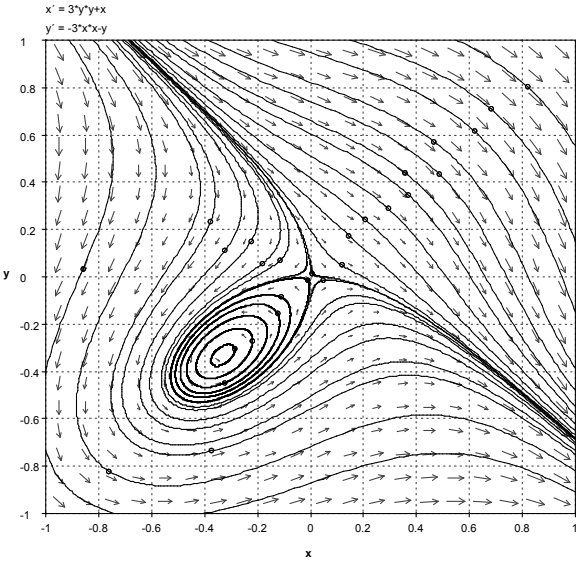


(a)

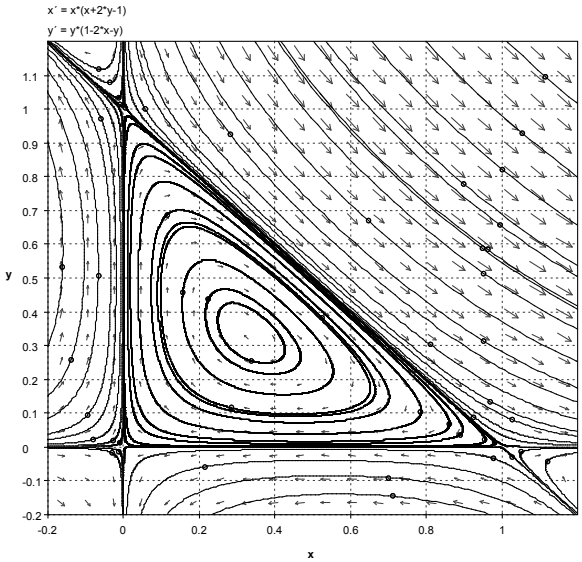
Figura 4: Diagramas de fase para el problema 5.5



(a)

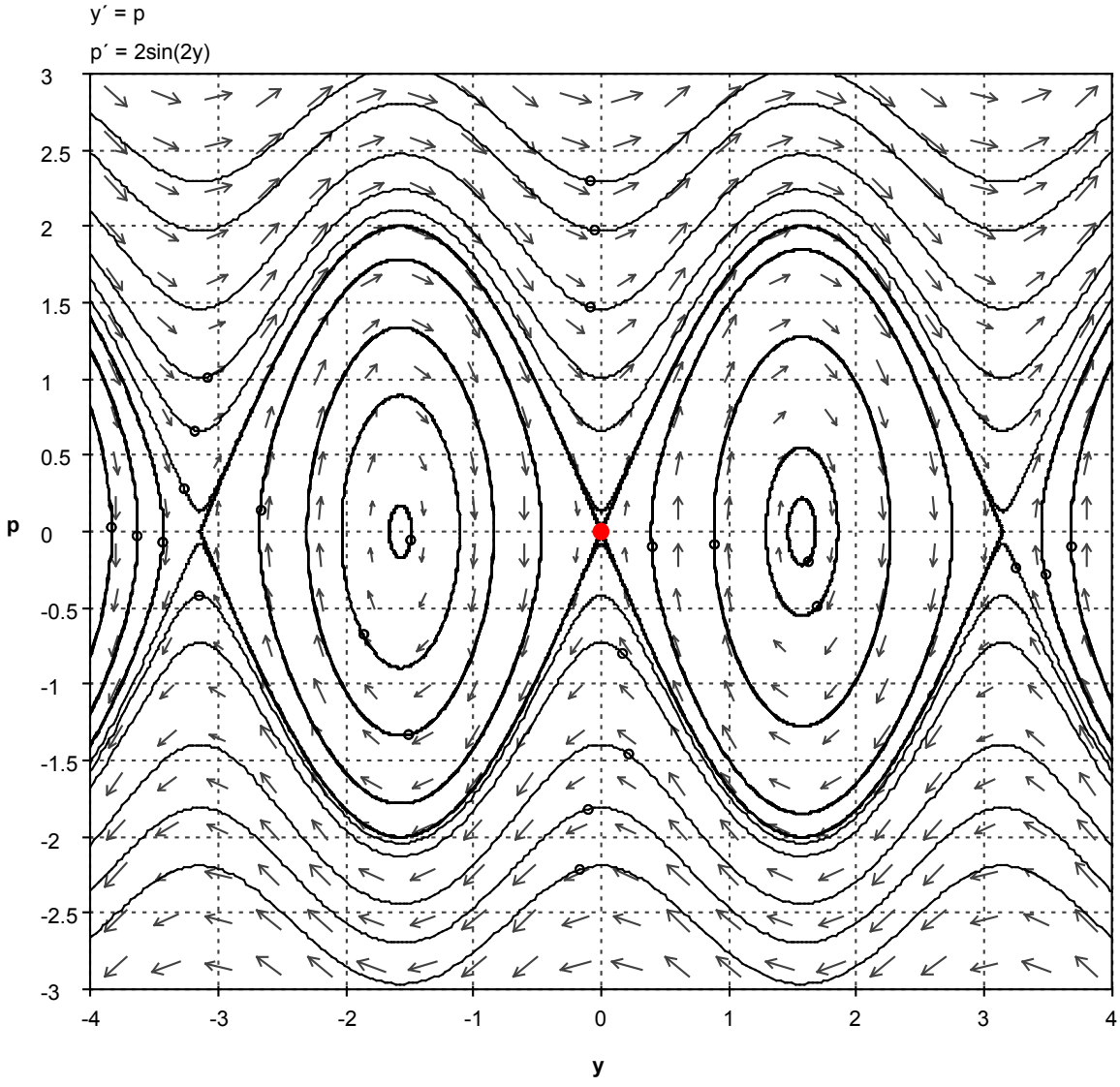


(b)



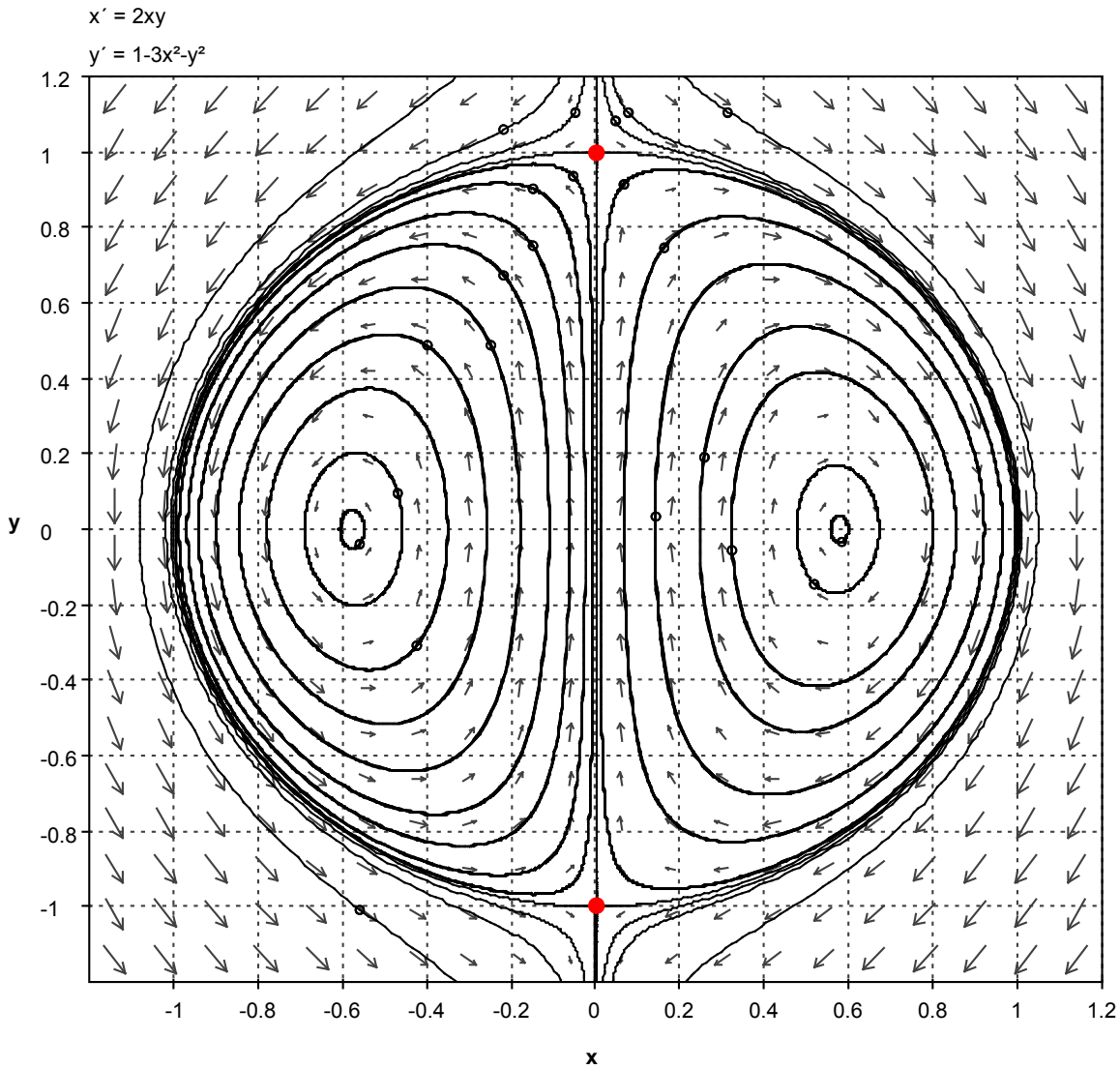
(c)

Figura 5: Diagramas de fase para el problema 5.9



(a)

Figura 6: Diagramas de fase para el problema 5.14



(a)

Figura 7: Diagramas de fase para el problema 5.15