Soluciones del capítulo 6
Conceptos básicos de dinámica discreta

Héctor Lomelí y Beatriz Rumbos

23 de noviembre de 2011

6.1

Sea

$$x_{t+1} = f(x_t, t) \tag{1}$$

un sistema no autónomo. Sea $y_t \equiv t$, entonces se tiene que $y_{t+1} = t + 1 = y_t + 1$. El sistema no autónomo dado por (1) es equivalente al sistema autónomo

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= f(x_t, y_t), \\ y_{t+1} &= y_t + 1, \end{aligned}$$

es decir, siempre podemos convertir un sistema no autónomo en uno autónomo a costa de aumentar la dimensión en uno. Ahora supongamos que tenemos un sistema de orden n dado como

$$x_{t+n} = g(x_t, \ldots, x_{t+(n-2)}, x_{t+(n-1)}). \tag{2}$$

Para cada $i = 1, \ldots, n$ se define $y_t^i = x_{t+i-1}$Entonces se tiene que el sistema (2) es equivalente al siguiente sistema de primer orden y dimensión n.

$$\begin{aligned} y_{t+1}^1 &= y_t^2, \\ &\vdots \\ y_{t+1}^{n-1} &= y_t^n \\ y_{t+1}^n &= g(y_t^1, y_t^2, \ldots, y_t^n). \end{aligned}$$

6.2

$f(0) = 0$, es decir $x^* = 0$ es un punto fijo. Si $x_t \in (0, \infty)$ entonces $x_t + 1 > 1$ y por tanto $f(x_t) = (1 + x_t)x_t > x_t$. Si $x_0 > 0$ la solución es creciente y positiva, es decir se aleja de x^*. Por otra parte, si $x_t \in (-1, 0)$, entonces la solución es estrictamente creciente y negativa y además $\lim_{t\to\infty} x_t = x^*$. Por lo tanto x^* no es ni asintóticamente estable ni asintóticamente inestable.

6.3

a) $x_{t+1} = \cos \pi(t+1) = -\cos \pi t = -x_t$.

b) $x_{t+1} = 2^{t+1} = 2(2^t) = 2^t + 2(2^{t-1}) = x_t + 2x_{t-1}$.

c) $x_{t+1} = \frac{(t+1)(t+2)}{2} = \frac{t^2+t+2t+2}{2} = \frac{t(t+1)}{2} + t + 1 = x_t + t + 1$.

6.4

a) $x_t = \left(-\frac{1}{2}\right)^t (x_0 - 2) + 2$. Además, $\lim\limits_{t\to\infty} x_t = 2$, es decir que es asintóticamente estable.

b) $x_t = \left(\frac{3}{2}\right)^t (x_0 + 4) - 4$. Además, $\lim\limits_{t\to\infty} x_t = \infty$, es decir que es asintóticamente inestable.

c) $x_t = (-1)^t \left(x_0 - \frac{5}{2}\right) + \frac{5}{2}$. Además, $\lim\limits_{t\to\infty} x_t$ no está definido, es decir, diverge.

d) $x_t = \left(-\frac{1}{3}\right)^t x_0$. Además, $\lim_{t\to\infty} x_t = 0$, es decir, es asintóticamente estable.

6.5

La ecuación en diferencias para el ingreso es $Y_{t+1} = mY_t + (c + I)$. Tiene como punto fijo a $Y^* = \frac{c+I}{1-m}$. Por lo tanto, su solución es $Y_t = m^t (Y_0 - Y^*) + Y^*$. Además $\lim_{t\to\infty} Y_t = Y^* > 0$ por lo que el punto fijo es asintóticamente estable.

6.6

a) El valor al tiempot t de la fábrica es igual al valor de las ganancias de la empresa al tiempo t más el valor descontado de la fábrica al tiempo $t+1$. Entonces, el valor de la fábrica en t es igual a las ganancias de la fábrica en t más P_{t+1} descontado un periodo. Por lo tanto, $P_t = Y_t + \beta P_{t+1}$. Así, resolveremos la ecuación $P_{t+1} = \beta^{-1}(P_t - Y_t)$.

b) Sea $Z_t = \beta^t P_t$, entonces, $Z_{t+1} - Z_t = \beta^{t+1} P_{t+1} - \beta^t P_t = \beta^{t+1}\beta^{-1}(P_t - Y_t) - \beta^t P_t = \beta^t P_t - \beta^t P_t - \beta^t Y_t = -\beta^t Y_t$. Es decir, la evolución de Z_t esta dada por la ecuación $Z_{t+1} = Z_t - \beta^t Y_t$.

c) Por el resultado del inciso anterior $Z_1 = Z_0 - \beta^0 Y_0 = Z_0 - \sum_{k=0}^{1-1} \beta^k Y_k$. Suponiendo que $Z_t = Z_0 - \sum_{k=0}^{t-1} \beta^k Y_k$, entonces, $Z_{t+1} = Z_t - \beta^t Y_t = Z_0 - \sum_{k=0}^{t-1} \beta^k Y_k - \beta^t Y_t = Z_0 - \sum_{k=0}^{(t+1)-1} \beta^k Y_k$. Así, por el principio de inducción matemática, se tiene que $Z_t = Z_0 - \sum_{k=0}^{t-1} \beta^k Y_k$.

d) Por el resultado del inciso anterior y la definición de Z_t se tiene que $\beta^t P_t = \beta^0 P_0 - \sum_{k=0}^{t-1} \beta^k Y_k = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k Y_k - \sum_{k=0}^{t-1} \beta^k Y_k = \sum_{k=t}^{\infty} \beta^k Y_k = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^{k+t} Y_{k+t} = \beta^t \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k Y_{k+t}$. Por lo tanto, $P_t = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k Y_{k+t}$

6.7

Se tiene que $f'(x_t) = 3x_t^2 - 2$. Notemos que $f'(-1) = 1 = f(1)$. Por lo tanto, el multiplicador de la órbita es $\Lambda = 1$.

6.8

a) Puntos fijos: $x_1^* = -1$ el cual es inestable y $x_2^* = 1$ el cual es un punto degenerado.

b) Puntos fijos: $x_1^* = 1$ el cual es inestable y $x_2^* = 3$ el cual es asintóticamente estable.

6.9

Sea $f(x_t) = cx_t(1 - x_t)$, entonces, $f'(x_t) = c(1 - 2x)$ y $f''(x_t) = -2c$. Por lo tanto f tiene un valor extremo en $x_t = 1/2$. Si $c \in [0, 4]$ se tiene que f es cóncava y f alcanza un máximo global $f_{\max} = f(1/2) = c/4 \leq 1$. Si además $x_t \in [0, 1]$, entonces, f es no negativa. Por lo tanto, si $c \in [0, 4]$ se cumple que $f[0, 1] \subset [0, 1]$.

6.10

a) $p_t = -\frac{1}{3}p_{t-1} + \frac{8}{3}$. El punto fijo es $p^* = 2$ el cual es asintóticamente estable, ya que $\lim_{t\to\infty} p_t = 2$.

b) $p_t = -p_{t-1} + \frac{11}{2}$. El punto fijo es $p^* = \frac{11}{4}$ el cual es degenerado.

c) $p_t = -3p_{t-1} + \frac{2}{5}$. El punto fijo es $p^* = \frac{1}{10}$ el cual es inestable.

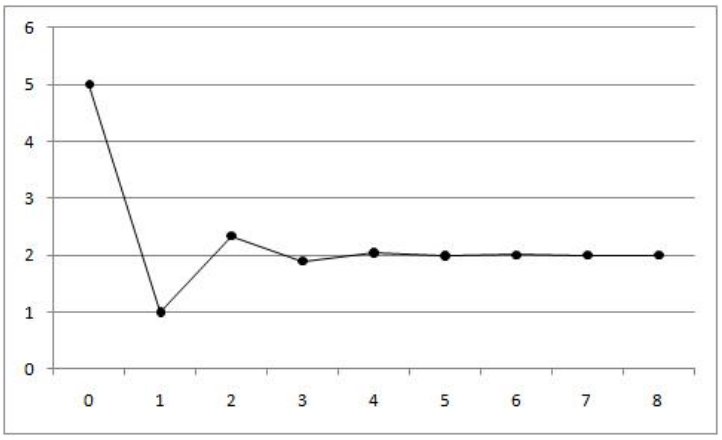
6.11

Ver Figura 1.

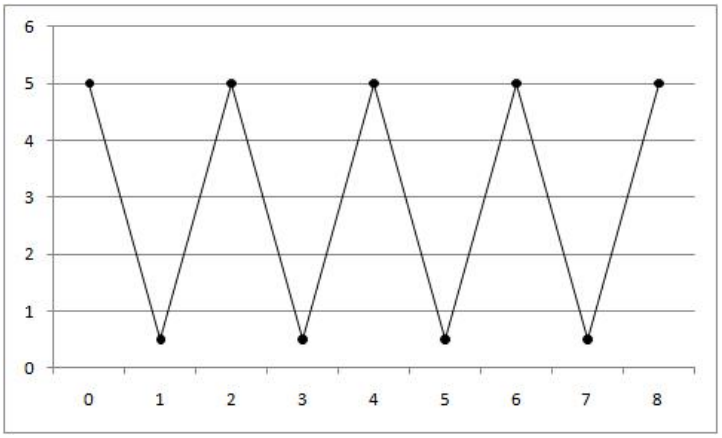
6.13

Ver Figura 2.

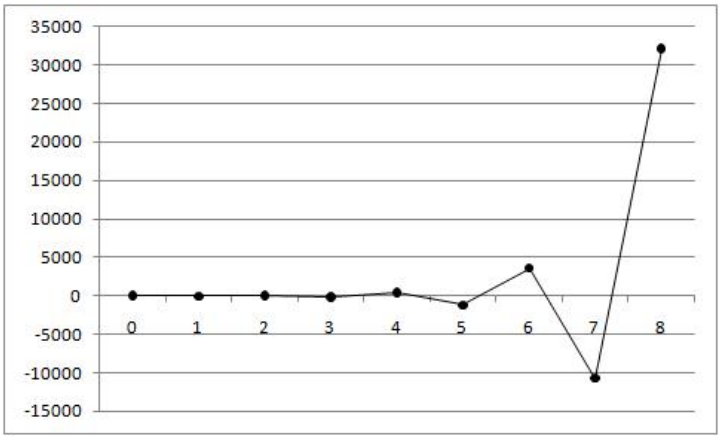
d) El sistema dinámico tiene un punto fijo en $x^* = 2.75$ que es inestable. Además, tiene un 2-ciclo $\{2.05217803813052, 3.19782196186948\}$.



(a) $x_0 = 5$ y $n = 8$

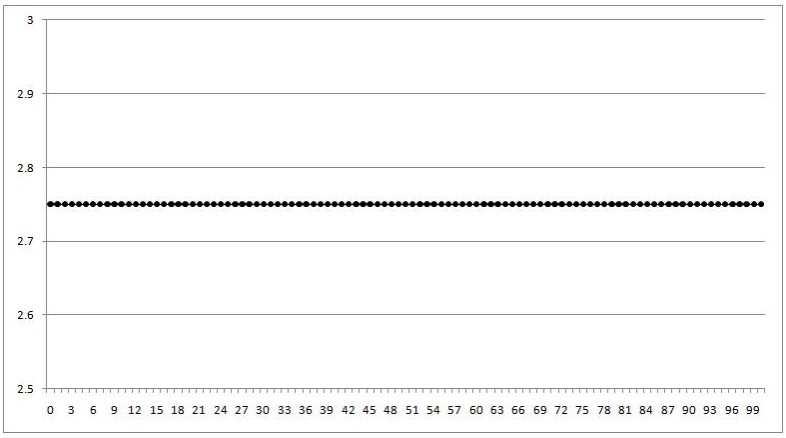


(b) $x_0 = 5$ y $n = 8$

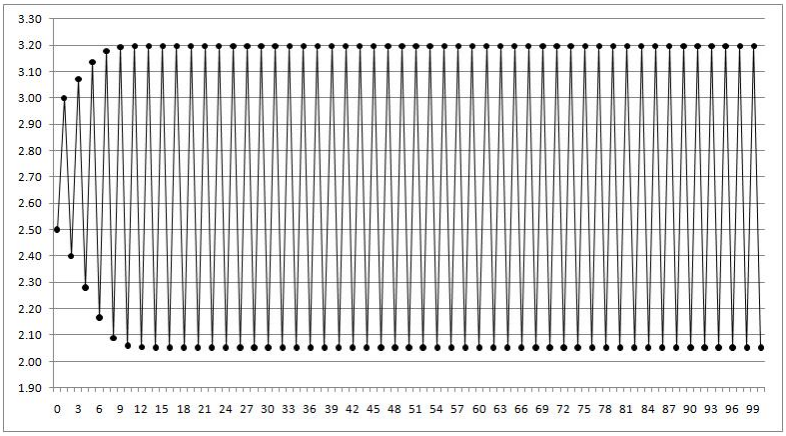


(c) $x_0 = 5$ y $n = 8$

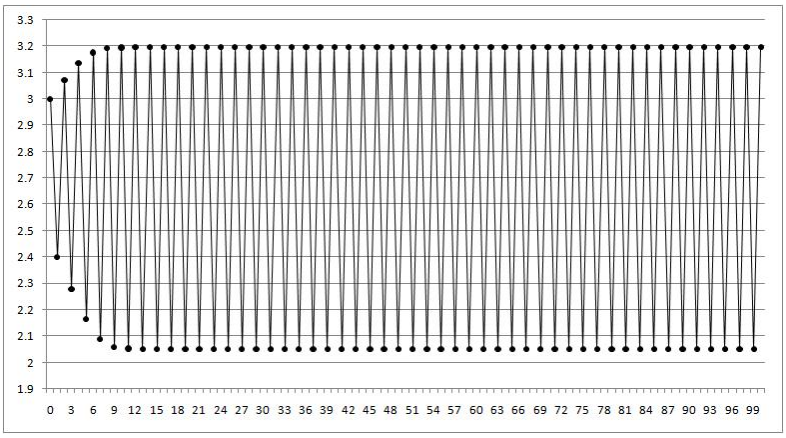
Figura 1: Orbitas del problema 6.11



(a) $x_0 = 2.75$



(b) $x_0 = 2.5$



(c) $x_0 = 3.0$

Figura 2: Orbitas del problema 6.13

6.14

a) Los puntos fijos del sistema son $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. La orbita de periodo dos es $\{0, 1\}$.

b) Para la órbita de periodo 2, el multiplicador es $\Lambda = |f'(0)f'(1)| = 0 < 1$ por lo que es asintóticamente estable. Para los puntos fijos se tiene $|f'^*)| = |1 \pm \sqrt{5}| > 1$, por lo que ambos son inestables.

6.15

a) Utilizaremos $f(z) = \lambda z - (\lambda + 1)z^3$. Es necesario demostrar que $f[-1, 1] \subset [-1, 1]$. La derivada de f es f'^2 y la segunda derivada es f''^2. La función f es cóncava en $[0, 1]$ y convexa en $[-1, 0]$. Veremos que $f[0, 1] \subset [-1, 1]$ y $f[-1, 0] \subset [-1, 1]$. Si $\lambda \geq 0$, entonces f tiene puntos críticos en

$$x_\pm = \pm\sqrt{\frac{\lambda}{3(\lambda + 1)}}.$$

Esto implica que x_+ es un máximo de f y x_- un mínimo. Notemos que $f(0) = 0$, $f(1) = -1$ y $f(x_+) = x_+\lambda/3$. Esto implica que si $\lambda \leq 3$ y $x \in [0, 1]$ entonces $-1 \leq f(x) \leq x_+\lambda/3 \leq 1$. De este modo se concluye $f[0, 1] \subset [-1, 1]$ y, de igual modo, $f[-1, 0] \subset [-1, 1]$.

b) Notemos que $f(z) = z$ si y solo si $z[(\lambda+1)z^2+(1-\lambda)] = 0$. Por lo tanto, el sistema siempre tiene un punto fijo en $z_1^* = 0$ y, si $\lambda \geq 1$ aparecen otros dos puntos fijos en

$$z_{2,3}^* = \pm\sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}}.$$

Para encontrar la estabilidad, se tiene que $f'(z_{2,3}^*) = 3 - 2\lambda$. Por tanto, los puntos fijos son asintóticamente estables si $|3 - 2\lambda| < 1$ e inestables si $|3 - 2\lambda| > 1$. Dado que $\lambda > 1$, al resolver las desigualdades se obtiene que estos puntos fijos son asintóticamente estables si $\lambda < 2$ e inestables si $\lambda > 2$.

c) Dado$f(z) = \lambda z - (\lambda + 1)z^3$ con $0 \leq \lambda \leq 3$, los puntos de periodo 2 se obtienen resolviendo

$$f^2(z) = f(f(z)) = z,$$

es decir, debemos obtener las raices del polinomio $p(z)$ de grado 9 dado por

$$\lambda(\lambda z - (\lambda + 1)z^3) - (\lambda + 1)(\lambda z - (\lambda + 1)z^3)^3 - z = 0,$$

o bien

$$(\lambda + 1)^4 z^9 + \left(-3\lambda (\lambda + 1)^3\right) z^7 + \left(3\lambda^2 (\lambda + 1)^2\right) z^5 + \left(-\lambda^3 (\lambda + 1) - \lambda (\lambda + 1)\right) z^3 + \left(\lambda^2 - 1\right) z = 0.$$

Los tres puntos fijos $0, \pm\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}$ son raices del polinomio así como también 1 y -1. De este modo, se puede factorizar a p como

$$p(z) = z\left(z^2-1\right)\left(z^2-\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)g(z),$$

donde

$$g(z) = z^4(\lambda+1)^4 - z^2\lambda(\lambda+1)^3 + (\lambda+1)^2.$$

Con el cambio de variable $x \equiv z^2$ pueden obtenerse fácilmente las cuatro raíces de g como

$$\pm\sqrt{\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4}}{2(\lambda+1)}}, \pm\sqrt{\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4}}{2(\lambda+1)}} \tag{3}$$

De lo anterior obtenemos las siguientes órbitas de periodo 2: $\{-1,1\}$ para cualquier λ y para $\lambda \geq 2$ se tienen otras dos órbitas:

$$\left\{\sqrt{\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4}}{2(\lambda+1)}}, \sqrt{\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4}}{2(\lambda+1)}}\right\},$$
$$\left\{-\sqrt{\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4}}{2(\lambda+1)}}, -\sqrt{\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4}}{2(\lambda+1)}}\right\}.$$

Para evaluar la estabilidad calculamos los multiplicadores de las órbitas dados por:

$$\begin{aligned} |f'(1)f'(-1)| &= (2\lambda+1)^2, \\ \left|f'\left(\pm\sqrt{\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4}}{2(\lambda+1)}}\right)f'\left(\pm\sqrt{\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4}}{2(\lambda+1)}}\right)\right| &= \left|9-2\lambda^2\right|. \end{aligned}$$

Notemos que $(2\lambda+1)^2 > 1$ y

$$\left|9-2\lambda^2\right| \begin{cases} < 1 \text{ si } 2 < \lambda < \sqrt{5}, \\ > 1 \text{ si } \sqrt{5} < \lambda \leq 3. \end{cases}$$

De esta forma, $\{-1,1\}$ nunca es estable, mientras que las dos órbitas que aparecen cuando $\lambda \geq 2$ son estables en el intervalo $2 < \lambda < \sqrt{5}$.

d) Ver figuras 3 y 4.

6.17

Se propone un cambio de variable lineal $y_t = \alpha x_t + \beta$, de tal forma que se tenga $y_{t+1} = c\,y_t(1-y_t)$. Se debe encontrar, por tanto, el valor de α, β y c. Al sustituir, se encuentra que $\beta = \frac{1}{2}$, $\alpha = -1-\sqrt{1-4k}$, y $c = 1/\alpha$. Notar que este cambio de variables se puede realizar siempre y cuando $k \leq 1/4$.

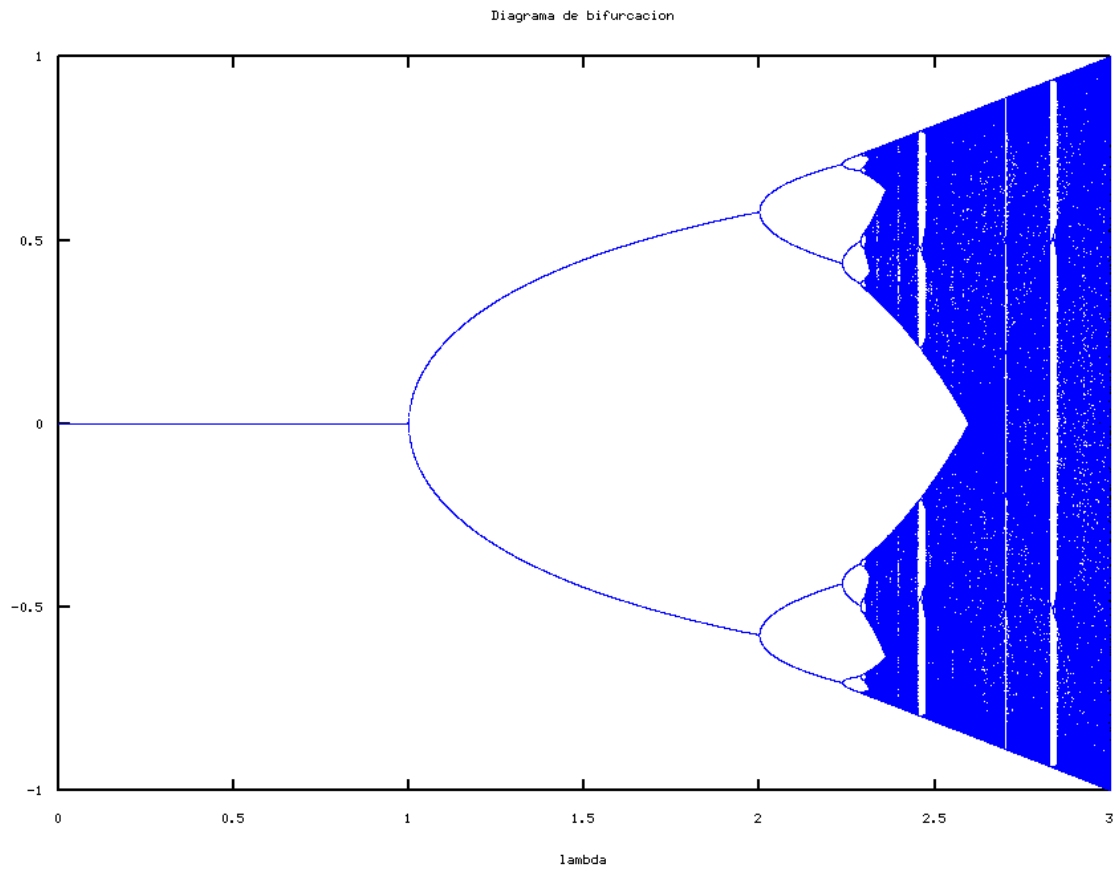


Figura 3: Diagrama de bifurcacón para el problema 6.15 con valores $0 < \lambda < 3$.

6.18

a) $x^* = 0$, entonces $f(0) = 0$ y $|f'(0)| \in [0, 1)$.

b) Se puede encontrar un número λ tal que $|f'(0)| < \lambda < 1$. Sea $0 < \varepsilon < \lambda - |f'(0)|$. Por la continuidad de la derivada f', existe una $\delta > 0$ tal que si $|x| < \delta$ entonces $|f'(0) - f'(x)| < \varepsilon$. Esto implica que $|f'(x)| < \varepsilon + |f'(0)| < \lambda$, para todo $x_0 \in (-\delta, \delta)$.

c) Si $x_0 \in (-\delta, \delta)$, entonces por el teorema del valor medio

$$|f(x_0)| = |f(x_0) - f(0)| =\leq |x_0 - 0| \max\{|f'(x)| : x \in (-\delta, \delta)\} < |x_0|\lambda < \delta.$$

d) Si $|f^t(x_0)| < \lambda^t |x_0|$ entonces $|f^t(x_0)| \in (-\delta, \delta)$ y $|f(f^t(x_0))| = |f^{t+1}(x_0)| < \lambda |f^t(x_0)| < \lambda^{t+1}|x_0|$.

e) $|\lim_{t\to\infty} f^t(x_0)| \leq \lim_{t\to\infty} |f^t(x_0)| \leq \lim_{t\to\infty} \lambda^t |x_0| = |x_0| \lim_{t\to\infty} \lambda^t = 0$.

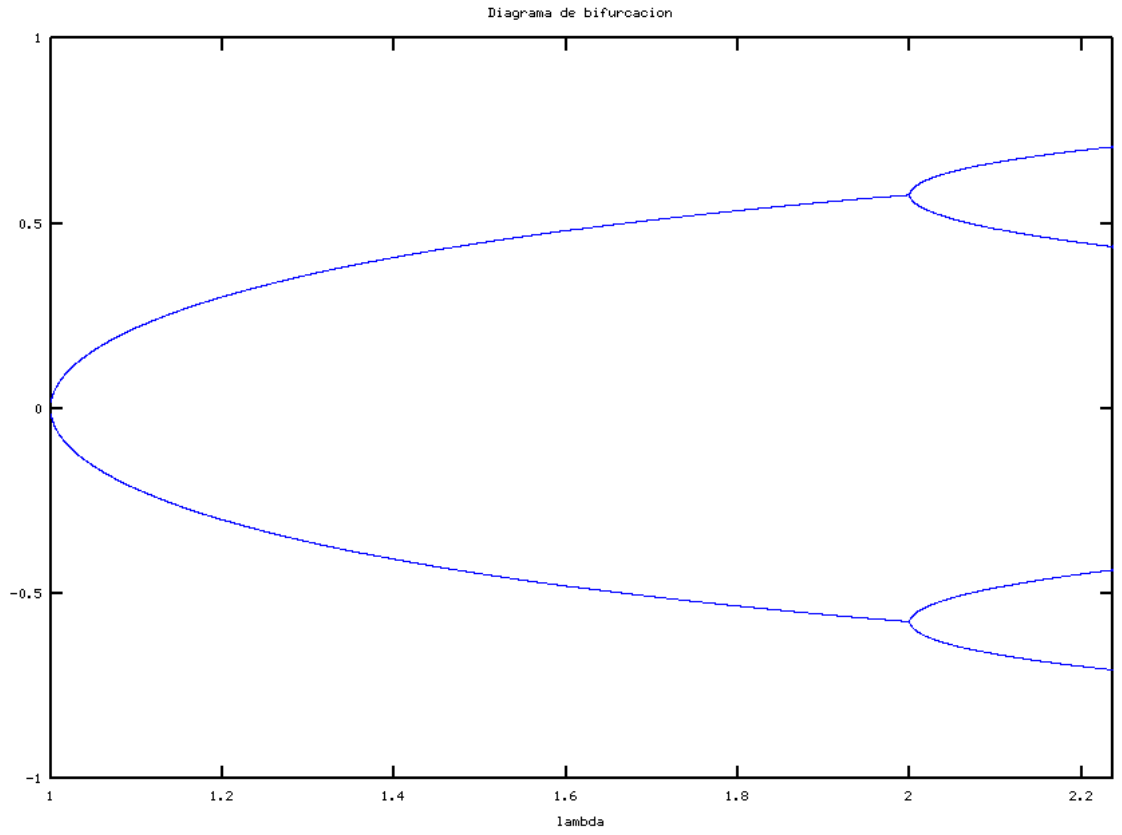


Figura 4: Diagrama de bifurcacón para el problema 6.15 con valores $1 < \lambda < \sqrt{5}$.

6.19

b) f es continua en $[\alpha, \gamma]$ y $f(\alpha) = \alpha < \gamma < f(\gamma) = \beta$. Por el teorema del valor intermedio existe $\delta \in (\alpha, \gamma)$ tal que $f(\delta) = \gamma$.

c) $f^3(\delta) = f^2(\gamma) = f(\beta) = \alpha$ y $f^2(\delta) = f(\gamma) = \beta$. Como $\alpha < \delta < \gamma < \beta$, entonces $f^3(\delta) < \delta < f(\delta) < f^2(\delta)$.

d) Sea $f(x) = 4x(1-x)$, f es continua en $[0,1]$, $f(0) = f(1) = 0$ y $f(1/2) = 1$. Por lo tanto cumple con las condiciones con $\alpha = 0$, $\beta = 1$ y $\gamma = 1/2$.