Soluciones del capítulo 7
Sistemas de ecuaciones en diferencias lineales

Héctor Lomelí y Beatriz Rumbos

18 de marzo de 2010

7.1

a) $X_t = k_1 3^t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 3^t \begin{pmatrix} -3t-1 \\ t \end{pmatrix}$.

b) $X_t = k_1 3^t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + k_2 (-2)^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) $X_t = 2^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d) $X_t = k_1 \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^t \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} + k_2 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^t \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7.2

$X_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{3}\right)^t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$. El punto fijo es $P^* = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ y es un nodo atractor.

7.3

$x_t = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t$. Por su parte, $\Phi = \lim_{t\to\infty} \frac{x_{t+1}}{x_t} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

7.4

Se procede por inducción. Sabemos que $F_2 = 1$. Por lo tanto, la igualdad se cumple para $t = 1$. Supongamos que se cumple para t. Entonces

$$A^t = \begin{pmatrix} F_{t-1} & F_t \\ F_t & F_{t+1} \end{pmatrix}.$$

Multiplicando por A, obtenemos

$$A^{t+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{t-1} & F_t \\ F_t & F_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_t & F_{t+1} \\ F_{t-1}+F_t & F_t+F_{t+1} \end{pmatrix}.$$

Usando la definición de los números de Fibonacci, se obtiene

$$A^{t+1} = \begin{pmatrix} F_t & F_{t+1} \\ F_{t+1} & F_{t+2} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto la desigualdad se cumple por inducción. La segunda parte está basada en el determinante. Esto es,

$$\det(A^t) = \det \begin{pmatrix} F_{t-1} & F_t \\ F_t & F_{t+1} \end{pmatrix} = F_{t-1}F_{t+1} - F_t^2.$$

Pero, $\det(A^t) = \det(A)^t = (-1)^t$, para todo $t \geq 1$.

7.5

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} p \\ 1-q \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (q-p)^t.$$

7.6

La solución general es de la forma

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = C_1 \lambda_1^t \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1-m_1 \end{pmatrix} + C_2 \lambda_2^t \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1-m_1 \end{pmatrix},$$

donde

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} n_1 + \frac{1}{2}\sqrt{n_1^2 + 4n_2(1-m_1)}$$

y

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} n_1 - \frac{1}{2}\sqrt{n_1^2 + 4n_2(1-m_1)}.$$

En el caso particular en el que $n_1 = 1$, $n_2 = 4$ y $m_1 = \frac{1}{2}$, se tiene que $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -1$. Por lo tanto, la solución del sistema es

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = C_1 2^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + C_2 (-1)^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

7.7

a) $Y_t^1 = C_t^1 + X_t^1 - M_t^1 + I^1 = (C_t^1 - M_t^1) + M_t^2 + I^1 = a_{11} Y_{t-1}^1 + a_{12} Y_{t-1}^2 + I^1$. Lo mismo se hace para el pais 2.

7.8

a) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{31}{21}\left(\frac{3}{5}\right)^t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{171}{91}\left(-\frac{1}{10}\right)^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{10}{13}\left(\frac{12}{10}\right)^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = k_1 \left(\frac{3}{5}\right)^t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2 \left(-\frac{1}{10}\right)^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + X_p$. La solución particular es de la forma $\begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix} = e^{\frac{t}{10}} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ y se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones

$$10 e^{\frac{1}{10}} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3A + 4B + 10 \\ 3A + 2B + 20 \end{pmatrix}.$$

Con la solución particular se pueden obtener las constantes k_1 y k_2 con las condiciones iniciales.

7.9

a) $x_t = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(-1)^t$.

b) $x_t = \frac{1}{3} 2^t + \frac{2}{3} 2^{-t}$.

c) $x_t = 3^{-t} + 5t 3^{-t}$.

d) $x_t = 5^t (\cos\theta t + \frac{5}{4}\sin\theta t)$ con $\cos\theta = \frac{-3}{5}$ y $\sin\theta = \frac{4}{5}$.

e) $x_t = 2^{t+1} - 1 - t$.

f) $x_t = -2^{-t} + t 2^{-t} + 2$.

g) $x_t = \frac{7}{3} 2^t + \frac{74}{3} 2^{-t} - t^2 + 2t - 6$.

7.10

La solución particular $At2^t$ no se puede utilizar pues es solución de la ecuación homogénea. La solución general de la ecuación es

$$x_t = C_1 2^t + C_2 + t2^{t-1},$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

7.11

Si A tiene dos valores propios reales y distintos λ_1, λ_2, entonces el polinomio característico se puede escribir como: $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$. Esto implica que $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = 0$. Por tanto, si definimos

$$M_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(A - \lambda_2 I)$$

y

$$M_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(A - \lambda_1 I),$$

entonces $AM_1 = \lambda_1 M_1$ y $AM_2 = \lambda_2 M_2$. Por inducción, podemos demostrar la fórmula. Para $t = 0$, claramente se cumple la igualdad pues $M_1 + M_2 = I$.

Supongamos para t. Entonces $A^t = \lambda_1^t M_1 + \lambda_2^t M_2$. Por tanto,

$$A^{t+1} = \lambda_1^t A\, M_1 + \lambda_2^t A\, M_2 = \lambda_1^{t+1} M_1 + \lambda_2^{t+1} M_2.$$

Esto termina la demostración.

7.12

a) Si algún valor propio λ_1 de la matriz A fuese complejo, entonces el complejo conjugado también sería valor propio de A; es decir, $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$. Esto implicaría que $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, lo cual es imposible.

b) *Necesidad.*

Si se cumple, $\lim_{t\to\infty} A^t \mathbf{w}_0 = \mathbf{0}$ entonces se tiene que cumplir (por el ejercicio 7.10), que $\lim_{t\to\infty} \lambda_2^t M_2 \mathbf{w}_0 = \mathbf{0}$. Esto sólo sucede si $M_2 \mathbf{w}_0 = \mathbf{0}$, que es equivalente a $A\mathbf{w}_0 = \lambda_1 \mathbf{w}_0$.

Suficiencia.

Si $A\mathbf{w}_0 = \lambda_1 \mathbf{w}_0$ entonces $M_2 \mathbf{w}_0 = \mathbf{0}$ y por lo tanto $\lim_{t\to\infty} A^t \mathbf{w}_0 = \lim_{t\to\infty} \lambda_1^t M_1 \mathbf{w}_0 = \mathbf{0}$.

7.13

Basta verificar que $X_{t+1} - AX_t = B_t$. Tenemos que

$$X_{t+1} - AX_t = \sum_{k=1}^{t+1} A^{k-1}\, B_{t+1-k} - \sum_{k=1}^{t} A^k\, B_{t-k} = B_t + \sum_{k=2}^{t+1} A^{k-1}\, B_{t+1-k} - \sum_{k=1}^{t} A^k\, B_{t-k}.$$

Como los dos últimos términos de la fórmula anterior se cancelan, se obtiene el resultado.

Si sustituimos $B_t = \lambda^t v$ en la fórmula, se obtiene

$$\sum_{k=1}^{t} A^{k-1}\, B_{t-k} = \sum_{k=1}^{t} A^{k-1}\lambda^{t-k} v = \sum_{k=1}^{t} \lambda^{k-1}\lambda^{t-k} v = t\lambda^{t-1} v.$$

Por lo tanto, la solución general queda como $X_t = A^t\, X_0 + t\lambda^{t-1} v$.