Soluciones del capítulo 8
Ecuaciones en diferencias estocásticas

Héctor Lomelí y Beatriz Rumbos

6 de abril de 2010

8.1

a) $p_t = \frac{1}{1+\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^k E_t(m_{t+k})$.

b) $p_t = \bar{m}$.

c) p_t aumenta acercándose a $\tilde{m}$ hasta llegar en el largo plazo.

8.2

Los rendimientos de un activo sin riesgo son iguales a su valor multiplicados por la tasa real rp_t. El rendimiento de una empresa esta dado por el valor esperado del cambio de su valor más sus dividendos $E_t(p_{t+1}) - p_t + d_t$. Para que no haya posibilidades de arbitraje, ambos rendimientos deben ser iguales. Es decir $rp_t = E_t(p_{t+1}) - p_t + d_t$. Reorganizando términos se recupera la ecuación

$$p_t = \frac{1}{1+r} E_t(p_{t+1}) + \frac{1}{1+r} d_t.$$

8.3

a) $y_t^d = \frac{1}{2}(a - p_t + m_t + g_t + u_t)$.

b) $y_t = y^* + \frac{1}{3}(m_t - E_{t-1}(m_t) + g_t - E_{t-1}(g_t) + u_t - E_{t-1}(u_t))$.

c) Si los individuos tienen previsión perfecta entonces $y_t = y^*$.

8.4

a) Por AD se tiene que $p_t = m_t - y_t$. Sustituyendo en AS resulta

$$y_t = m_t - y_t - E_{t-1}(m_t) + E_{t-1}(y_t) + u_t.$$

Entonces

$$E_{t-1}(y_t) = E_{t-1}(m_t) - E_{t-1}(y_t) - E_{t-1}(m_t) + E_{t-1}(y_t) + E_{t-1}(u_t) = E_{t-1}(u_t).$$

Por lo tanto,

$$y_t = \frac{1}{2}[m_t - E_{t-1}(m_t) + E_{t-1}(u_t) + u_t].$$

Sustituyendo con MS se llega a la forma reducida

$$y_t = \frac{1}{2}[m + u_t - m - aE_{t-1}(u_t) + E_{t-1}(u_t) + u_t] = \frac{1}{2}[(1+a)u_t + (1-a)E_{t-1}(u_t)]$$

que únicamente depende de u_t.

b) La varianza es mínima cuando se escoge $a = 1$.

8.5

Definiendo $x_t = m_t + v_t - u_t$ se tiene que

$$p_t = \frac{1}{2}\left(E_{t-1}(p_t) + x_t\right)$$

La esperanza más antigua es E_{t-1} por lo que se propone la solución

$$p_t = AE_{t-1}(x_t) + Bx_t$$

De aquí se calcula la esperanza condicionada E_{t-1} para obtener

$$\begin{aligned} E_{t-1}(p_t) &= E_{t-1}\left(AE_{t-1}(x_t) + Bx_t\right) \\ &= AE_{t-1}(x_t) + BE_{t-1}(x_t) = (A+B)E_{t-1}(x_t). \end{aligned}$$

Sustituyendo en la primera expresión se tiene

$$\begin{aligned} p_t &= \frac{1}{2}\left(E_{t-1}(p_t) + x_t\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((A+B)E_{t-1}(x_t) + x_t\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$AE_{t-1}(x_t) + Bx_t = \frac{1}{2}\left((A+B)E_{t-1}(x_t) + x_t\right)$$

e igualando coeficientes de ambos lados

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(A+B), \\ B &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}$$

y de aquí

$$\begin{aligned} p_t &= \frac{1}{2}\left(E_{t-1}(x_t) + x_t\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(E_{t-1}(m_t + v_t - u_t) + m_t + v_t - u_t\right). \end{aligned}$$

8.6

a)

$$p_t = \left(K_1\rho_1 - \rho_1^2\right) u_{t-2} + \left(K_2\rho_2 + \rho_2^2\right) v_{t-2} + \frac{2}{3}\left((K_1 - \rho_1)\eta_{t-1} + (K_2 + \rho_2)\varepsilon_{t-1}\right) + \frac{1}{2}(\varepsilon_t - \eta_t),$$
$$y_t = \frac{1}{3}\left((\rho_2 - K_2)\,\varepsilon_{t-1} + (2\rho_1 - K_1)\,\eta_{t-1}\right) + \frac{1}{2}(\varepsilon_t - \eta_t).$$

Como y_t depende únicamente de los procesos η_t y ε_t, se tiene que

$$E(y_t) = 0$$

y los valores de K_1 y K_2 no afectan el valor esperado de y_t.

b)

$$\mathrm{Var}(y_t) = \frac{1}{9}\left((\rho_2 - K_2)^2\,\mathrm{Var}(\varepsilon_{t-1}) + \frac{1}{9}\,(2\rho_1 - K_1)^2\,\mathrm{Var}(\eta_{t-1}) + \frac{1}{4}\,\mathrm{Var}(\varepsilon_t) + \frac{1}{4}\,\mathrm{Var}(\eta_t)\right.$$

que se minimiza escogiendo

$$K_1 = 2\rho_1,$$
$$K_2 = \rho_2.$$

c)

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(p_t) = {} & \left(K_1\rho_1 - \rho_1^2\right)^2 \mathrm{Var}(u_{t-2}) + \left(K_2\rho_2 + \rho_2^2\right)^2 \mathrm{Var}(v_{t-2}) \\ & + \frac{4}{9}(K_1 - \rho_1)^2\,\mathrm{Var}(\eta_{t-1}) + \frac{4}{9}(K_2 + \rho_2)^2\,\mathrm{Var}(\varepsilon_{t-1}) + \frac{1}{4}\,\mathrm{Var}(\varepsilon_t) + \frac{1}{4}\,\mathrm{Var}(\eta_t)\end{aligned}$$

que se minimiza escogiendo

$$K_1 = \rho_1,$$
$$K_2 = -\rho_2.$$

d) La política monetaria tiene efecto sobre la varianza en el ingreso puesto que pueden eliminarse las varianzas ocasionadas por los shocks del periodo $t - 1$, ocurridos después de la firma de los contratos laborales pero antes de la firma del siguiente contrato.