Soluciones del capítulo 9
Optimización Estática

Héctor Lomelí y Beatriz Rumbos

26 de febrero de 2010

9.1

Sean A y B dos subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$:

b) Sea $A + B = \{a + b : a \in A \text{ y } b \in B\}$ y sean $x, y \in A + B$. Se tiene que $x = a_1 + b_1$ y $y = a_2 + b_2$ con $a_1, a_2 \in A$ y $b_1, b_2 \in B$. Como A y B son convexos entonces $\forall\lambda \in (0, 1)$ se tiene que $\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2 \in A$ y $\lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2 \in B$. Por lo tanto $\lambda x + (1 - \lambda)y = \lambda(a_1 + b_1) + (1 - \lambda)(a_2 + b_2) = [\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2] + [\lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2] \in A + B$. Por lo tanto $A + B$ es convexo.

c) Sea $k \in \mathbb{R}$ y $kA = \{ka : a \in A\}$ y sean $x, y \in kA$. Entonces, $x = ka_1$ y $y = ka_2$ con $a_1, a_2 \in A$. Como A es convexo entonces $\forall\lambda \in (0, 1)$ se tiene que $\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2 \in A$. Por lo tanto, $\lambda x + (1 - \lambda)y = \lambda k a_1 + (1 - \lambda)k a_2 = k(\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2) \in kA$. Por lo tanto kA es convexo.

9.2

Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ dos funciones cóncavas y $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Como f es cóncava, entonces $\forall\lambda \in (0, 1)$ y $\forall\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$, se tiene que $f(\lambda\mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2) \geq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda)f(\mathbf{x}_2)$. Si $\alpha > 0$ entonces $\alpha f(\lambda\mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2) \geq \alpha(\lambda f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda)f(\mathbf{x}_2)) = \lambda(\alpha f(\mathbf{x}_1)) + (1 - \lambda)(\alpha f(\mathbf{x}_2))$. Por lo tanto αf es cóncava.

b) Como f es cóncava, entonces $\forall\lambda \in (0, 1)$ y $\forall\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$, se tiene que $f(\lambda\mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2) \geq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda)f(\mathbf{x}_2)$. Si $\alpha < 0$ entonces

$$\begin{aligned}\alpha f(\lambda\mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2) &\leq \alpha(\lambda f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda)f(\mathbf{x}_2)) \\ &= \lambda(\alpha f(\mathbf{x}_1)) + (1 - \lambda)(\alpha f(\mathbf{x}_2)).\end{aligned}$$

Por lo tanto αf es convexa.

c) Como f y g son cóncavas, entonces $\forall\lambda \in (0, 1)$ y $\forall\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$, se tiene que $f(\lambda\mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2) \geq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda)f(\mathbf{x}_2)$ y $g(\lambda\mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2) \geq \lambda g(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda)g(\mathbf{x}_2)$. Entonces $f(\lambda\mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2) + g(\lambda\mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2) \geq [\lambda f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda)f(\mathbf{x}_2)] + [\lambda g(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda)g(\mathbf{x}_2)]$. Por lo tanto $(f + g)(\lambda\mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2) \geq \lambda(f + g)(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda)(f + g)(\mathbf{x}_2)$. Es decir, $f + g$ es cóncava.

d) Como f es cóncava, entonces $\forall\lambda \in (0,1)$ y $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$, se tiene que $g(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \geq \lambda g(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda)g(\mathbf{x}_2)$. Como h es creciente y cóncava entonces

$$\begin{aligned}(h \circ g)(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) &= h(g(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2)) \\ &\geq h(\lambda g(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda)g(\mathbf{x}_2)) \geq \lambda h(g(\mathbf{x}_1)) + (1-\lambda)h(g(\mathbf{x}_2)) \\ &= \lambda(h \circ g)(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda)(h \circ g)(\mathbf{x}_2).\end{aligned}$$

Por lo tanto $(h \circ g)$ es cóncava.

9.3

a) Convexo. **b)** No convexo. **c)** Convexo.

9.4

a) Dado $k > 0$, el contorno superior $CS_f(k) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : xy \geq k\}$ es un conjunto convexo, por lo tanto f es cuasi cóncava.

b) Como f es doblemente diferenciable podemos usar su matriz hessiana $H = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Como $f_{xx} = f_{yy} = 2 > 0$ y $|H| = 0$, entonces H es positiva semidefinida. Por lo tanto, f es convexa.

c) Como f es doblemente diferenciable podemos usar su matriz hessiana $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Como $f_{xx} = f_{yy} = 2 > 0$ y $|H| = 4 > 0$, entonces H es positiva definida. Por lo tanto, f es estrictamente convexa.

9.5

f es una función cóncava para $a \leq 0$ y $b \leq 0$

9.6

a) Si el dominio de la función se restringe a $\mathbb{R}^2_{++}$, entonces como $g(x, y) = xy$ es cuasi cóncava y $\log x$ es estrictamente creciente, $f(x, y) = \log xy$ es cuasicóncava. Si el dominio incluye $x, y < 0$ entonces el dominio no es convexo.

b) f es cóncava.

c) f es convexa.

9.7

$g(x) = \log\left(\prod_{k=1}^n x_k^{\alpha_k}\right) = \sum_{k=1}^n \alpha \log(x_k)$. Como g es doblemente diferenciable en su dominio podemos considerar a su matriz hessiana

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1}{x_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha_2}{x_2^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{\alpha_n}{x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Como $-H$ es positiva definida, entonces H es negativa definida y g es estrictamente cóncava.

9.8

Sea $h(\mathbf{x}) = \exp(g(\mathbf{x})) = \prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k}$. En el ejercicio anterior se demostró que g es estrictamente cóncava. Dado que $\exp(x)$ es creciente, entonces $f \circ q$ es cuasi cóncava.

9.9

a) Sean $\tilde{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{f(\mathbf{a})}$ y $\tilde{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}}{f(\mathbf{b})}$. Entonces $f(\tilde{\mathbf{a}}) = f\left(\frac{\mathbf{a}}{f(\mathbf{a})}\right) = \left(\frac{1}{f(\mathbf{a})}\right) f(\mathbf{a}) \frac{f(\mathbf{a})}{f(\mathbf{a})} = 1$. De manera similar, $f(\mathbf{b}) = 1$. Por lo tanto, $\tilde{\mathbf{a}}.\tilde{\mathbf{b}} \in CS_f(1)$.

b) Sea $\mu = \frac{\lambda f(\mathbf{b})}{(1-\lambda) f(\mathbf{a}) + \lambda f(\mathbf{b})}$. Como λ, $(1-\lambda)$, $f(\mathbf{b})$, $f(\mathbf{a}) > 0$, entonces $\mu > 0$. Por otra parte, como $(1-\lambda) f(\mathbf{a}) > 0$, entonces $\lambda f(\mathbf{b}) < \lambda f(\mathbf{b}) + (1-\lambda) f(\mathbf{a})$. Por lo tanto $\mu = \frac{\lambda f(\mathbf{b})}{(1-\lambda) f(\mathbf{a}) + \lambda f(\mathbf{b})} < 1$. Entonces $\mu \in (0, 1)$.

c) Como $\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}} \in CS_f(1)$, $\mu \in (0, 1)$ y $CS_f(1)$ es convexo, entonces $(1-\mu)\tilde{\mathbf{a}} + \mu\tilde{\mathbf{b}} \in CS_f(1)$. Por lo tanto $f((1-\mu)\tilde{\mathbf{a}} + \mu\tilde{\mathbf{b}}) \geq 1$.

d) De la definición de μ se tiene que

$$(1-\mu) = 1 - \frac{\lambda f(\mathbf{b})}{(1-\lambda) f(\mathbf{a}) + \lambda f(\mathbf{b})} = \frac{(1-\lambda) f(\mathbf{a})}{(1-\lambda) f(\mathbf{a}) + \lambda f(\mathbf{b})}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
1 &\leq f((1-\mu)\tilde{\mathbf{a}} + \mu\tilde{\mathbf{b}}) \\
&= f\left(\left(\frac{(1-\lambda) f(\mathbf{a})}{(1-\lambda) f(\mathbf{a}) + \lambda f(\mathbf{b})}\right)\left(\frac{\mathbf{a}}{f(\mathbf{a})}\right) + \left(\frac{\lambda f(\mathbf{b})}{(1-\lambda) f(\mathbf{a}) + \lambda f(\mathbf{b})}\right)\left(\frac{\mathbf{b}}{f(\mathbf{b})}\right)\right) \\
&= f\left(\frac{(1-\lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}}{(1-\lambda) f(\mathbf{a}) + \lambda f(\mathbf{b})}\right) = \frac{f((1-\lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b})}{(1-\lambda) f(\mathbf{a}) + \lambda f(\mathbf{b})}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f((1-\lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) \geq (1-\lambda) f(\mathbf{a}) + \lambda f(\mathbf{b})$. Es decir, f es cóncava.

9.10

En el ejercicio 9.8 se mostró que $f(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} x_k^{\alpha_k}$ es cuasicóncava. Además, para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_{++}$, $f(\mathbf{x}) > 0$. Si $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$, entonces f es homogénea de grado 1. Por lo tanto, por el resultado del ejercicio 9.9 se tiene que f es cóncava. Si $0 < \sum_{k=1}^{n} \alpha_k < 1$, entonces la función se obtiene como una transformación cóncava y creciente de la función $g(x) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_k^{\alpha_k}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ con $\beta = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$, que es cóncava pues $\frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$; por lo tanto, $f(\mathbf{x})$ es también cóncava.

9.11

a) Si $\lambda > 0$ entonces

$$\begin{aligned}
w(\lambda\mathbf{x}) &= \left(\delta_1(\lambda x_1)^\rho + \delta_2(\lambda x_2)^\rho + \ldots + \delta_n(\lambda x_n)^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}} \\
&= \left(\lambda^\rho\left(\delta_1 x_1^\rho + \delta_2 x_2^\rho + \ldots + \delta_n x_n^\rho\right)\right)^{\frac{1}{\rho}} = \lambda\left(\delta_1 x_1^\rho + \delta_2 x_2^\rho + \ldots + \delta_n x_n^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}} \\
&= \lambda w(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).
\end{aligned}$$

b) Supongamos que $\sum_{i=1}^{n} \delta_i = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_k x_k^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}} &= \lim_{\rho\to 0}\exp\left(\log\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_k x_k^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right)\\ &= \lim_{\rho\to 0}\exp\left(\frac{1}{\rho}\log\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_k x_k^{\rho}\right)\right).\end{aligned}$$

Tenemos que

$$\lim_{\rho\to 0}\left(\frac{1}{\rho}\log\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_k x_k^{\rho}\right)\right) = \lim_{\rho\to 0}\left(\frac{\log\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_k x_k^{\rho}\right)}{\rho}\right) = \lim_{\rho\to 0}\frac{f(\rho)}{g(\rho)},$$

en donde $f(\rho) = \log\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_k x_k^{\rho}\right)$, y $g(\rho) = \rho$. Usando el teorema de L'Hopital

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to 0}\frac{f(\rho)}{g(\rho)} &= \lim_{\rho\to 0}\frac{f'(\rho)}{g'(\rho)}\\ &= \lim_{\rho\to 0}\frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_k x_k^{\rho}\log x_k}{\sum_{i=1}^{n}\delta_k x_k^{\rho}}\right)}{1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_k\log x_k}{\sum_{i=1}^{n}\delta_k}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\delta_k\log x_k.\end{aligned}$$

De esta forma, como la función exponencial es continua, se tiene:

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to 0}\left(\exp\left(\frac{\log\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_k x_k^{\rho}\right)}{\rho}\right)\right) &= \lim_{\rho\to 0}\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_k\log x_k\right)\right)\\ &= \exp\left(\log\left(\prod_{i=1}^{n}x_k^{\delta_k}\right)\right) = \prod_{i=1}^{n}x_k^{\delta_k}.\end{aligned}$$

c) Si $\rho = 1$ entonces $w(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\delta_k x_k$.

d) La matriz hessiana de $g(\mathbf{x})$ es

$$H = \begin{pmatrix} \delta_1\rho(\rho-1)x_1^{\rho-2} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \delta_2\rho(\rho-1)x_2^{\rho-2} & \dots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & & \delta_n\rho(\rho-1)x_n^{\rho-2}\end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, si $\rho \in (0, 1)$, H es negativa definida y g es cóncava.

e) $w(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})^{\frac{1}{\rho}}$, por lo tanto como g es cóncava, entonces w es cuasi cóncava. Como además es positiva y homogénea de grado 1, por el teorema demostrado en el ejercicio 9.9, w es también cóncava. Además cuando $\rho = 1$ es lineal y por lo tanto cóncava. En general, si $\rho \in (0, 1]$, entonces w es cóncava.

9.12

Se definen $\tilde{a} = \frac{\mathbf{a}}{f(\mathbf{a})}$ y $\tilde{b} = \frac{\mathbf{b}}{f(\mathbf{b})}$. Como f es homogénea de grado 1 se tiene que $f(\tilde{a}) = f(\tilde{b}) = 1$ y, por lo tanto, $\tilde{a}, \tilde{b} \in CI_f(1)$. Para $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X$ y para $\lambda \in (0, 1)$ se define

$$\mu = \frac{\lambda f(\mathbf{b})}{(1-\lambda) f(\mathbf{a}) + \lambda f(\mathbf{b})}$$

y se muestra (como en el ejercicio 9.9) que $0 < \mu < 1$. Como la función es cuasi convexa, $CI_f(1)$ es convexo y por lo tanto $f((1-\mu)\tilde{a} + \mu\tilde{b}) \leq 1$. Finalmente, substituyendo con $\mu, \tilde{a}$ y $\tilde{b}$ y utilizando la homogeneidad de f resulta que

$$(1-\lambda) f(\mathbf{a}) + \lambda f(\mathbf{b}) \geq f((1-\lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}).$$

Es decir, f es convexa.

Sea w una función CES. Cuando $\rho > 1$ se tiene que w es cuasi convexa (ver ejercicio 9.11), como además es homogénea de grado 1 y positiva, es necesariamente convexa.

9.13

a) Sean $a < z_1 < z_3 < b$ y $z_2 = \lambda z_1 + (1-\lambda) z_2$ con $\lambda \in (0, 1)$; entonces, $f(z_2) \geq \lambda f(z_1) + (1-\lambda) f(z_3)$. Además se tiene que si $\lambda = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$ y $(1-\lambda) = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$ se cumple:

$$\begin{aligned} f(z_2) &= \lambda f(z_2) + (1-\lambda) f(z_2) \\ &= \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} f(z_2) + \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} f(z_2) \geq \lambda f(z_1) + (1-\lambda) f(z_3) \\ &= \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} f(z_1) + \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} f(z_3). \end{aligned}$$

Multiplicando por $(z_3 - z_1) > 0$ y reacomodando términos se obtiene que

$$(z_3 - z_2)(f(z_2) - f(z_1)) \geq (z_2 - z_1)(f(z_3) - f(z_2)),$$

es decir,

$$\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \geq \frac{f(z_3) - f(z_2)}{z_3 - z_2}.$$

b) Dado que los números reales forman un campo completo, siempre se puede encontrar un número real entre dos números reales distintos. Por lo tanto, para cualquier $x \in (a, b)$, se pueden elegir r, s, t, u tales que $a < r < s < x < t < u < b$.

c) Eligiendo r, s, t, u como en el inciso b y usando el resultado del inciso a) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{f(s) - f(r)}{s - r} \geq \frac{f(x) - f(s)}{x - s} &\geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \\ \geq \frac{f(t) - f(y)}{t - y} &\geq \frac{f(u) - f(t)}{u - t}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si definimos las constantes C_1 y C_2 comoro $C_1 = \frac{f(s) - f(r)}{s - r}$ y $C_2 = \frac{f(u) - f(t)}{u - t}$ se obtiene que para todo $y \in (x, t)$ se tiene que

$$C_1 \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq C_2.$$

d) $\lim_{y\to x^+} C_1(y-x) \geq \lim_{y\to x^+}(f(y)-f(x)) \geq \lim_{y\to x^+} C_2(y-x)$. Como $\lim_{y\to x^+} C_1(y-x) = \lim_{y\to x^+} C_2(y-x) = 0$, entonces $\lim_{y\to x^+}(f(y)-f(x)) = 0$. Esto implica que $\lim_{y\to x^+} f(y) = \lim_{y\to x^+} f(x) = f(x)$. Análogamente se puede demostrar que $\lim_{y\to x^-} f(y) = f(x)$. Por lo tanto $\lim_{y\to x} f(y) = f(x)$, es decir, f es una función continua en (a, b).

9.14

Como f es clase $\mathcal{C}^2$, podemos escribir su mejor aproximación de segundo orden como: $f(\mathbf{y}) \approx f(\mathbf{x}) + (\mathbf{y}-\mathbf{x})^T \nabla f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{x})^T Hf(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x})$.

f es cóncava si y sólo sí

$$f(\mathbf{x}) + (\mathbf{y}-\mathbf{x})^T \nabla f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{y}) \approx f(\mathbf{x}) + (\mathbf{y}-\mathbf{x})^T \nabla f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{x})^T Hf(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x}).$$

Entonces f es cóncava si y sólo si para todo $\mathbf{y}, \mathbf{x} \in X$ se tiene que $\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{x})^T Hf(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \leq 0$. Es decir, si y sólo si Hf es negativa semidefinida.

Si Hf es negativa definida, entonces para todo $\mathbf{y}, \mathbf{x} \in X$ se tiene que $\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{x})^T Hf(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x}) < 0$, y por lo tanto

$$f(\mathbf{x}) + (\mathbf{y}-\mathbf{x})^T \nabla f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}) + (\mathbf{y}-\mathbf{x})^T \nabla f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{x})^T Hf(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{y}).$$

Por lo tanto, f es estrictamente cóncava.

De forma análoga se muestra que f es convexa si y solo si Hf es positivo semidefinido y que si Hf es positiva definida entonces f es estrictamente convexa.

9.15

Sea $\mathbf{x}^* = (x^*, y^*)$ la solución del problema con $\nabla g(\mathbf{x}^*) \neq 0$, entonces $g_y(\mathbf{x}^*) \neq 0$ y, por el teorema de la función implícita, en una vecindad de $\mathbf{x}^*$, y es una función diferenciable de x y $\frac{dy}{dx} = -\frac{g_x}{g_y}$. Entonces, el problema se puede reescribir como

$$\max F(x) = f(x, y(x))$$

y la condición de primer orden es

$$\frac{dF}{dx}(\mathbf{x}^*) = f_x(\mathbf{x}^*) + f_y(\mathbf{x}^*)\left(-\frac{g_x(\mathbf{x}^*)}{g_y(\mathbf{x}^*)}\right) = 0.$$

Es decir,

$$\frac{f_x(\mathbf{x}^*)}{g_x(\mathbf{x}^*)} = \frac{f_y(\mathbf{x}^*)}{g_y(\mathbf{x}^*)}.$$

Se define

$$\lambda^* = \frac{f_x(\mathbf{x}^*)}{g_x(\mathbf{x}^*)} = \frac{f_y(\mathbf{x}^*)}{g_y(\mathbf{x}^*)}.$$

Por lo que la condición de primer orden equivale a: $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}^*)$.

9.16

a) Por el lema de Shepard $\frac{\partial C}{\partial w_j} = x_j^* > 0$. Por lo tanto C es creciente en w_j para cada $j = 1, 2, \ldots, n$. Entonces, $\mathbf{w}^1 > \mathbf{w}^2$ implica que $C(\mathbf{w}^1, q) > C(\mathbf{w}^2, q)$.

b) $C(\mathbf{w}, q) = \min\{\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} : f(\mathbf{x}) = q\}$, $C(t\mathbf{w}, q) = \min\{t\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} : f(\mathbf{x}) = q\} = t \min\{\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} : f(\mathbf{x}) = q\}$. Por lo tanto, el vector de insumos óptimo $\mathbf{x}^*(tw, q)$ es igual a $\mathbf{x}^*(w, q)$ (la intuición es que los precios relativos de los insumos no cambian). Por lo tanto:

$$C(t\mathbf{w}, q) = t\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}^*(t\mathbf{w}, q) = t\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}^*(\mathbf{w}, q) = tC(\mathbf{w}, q).$$

c) Sea $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}^1 + (1-\lambda)\mathbf{w}^2$. Los vectores óptimos de insumos para $\mathbf{w}^1$ y $\mathbf{w}^2$ son $\mathbf{x}^*(\mathbf{w}^1, q)$ y $\mathbf{x}^*(\mathbf{w}^2, q)$, respectivamente, de manera que se cumple:

$$C(\mathbf{w}^i, q) = \mathbf{w}^i \cdot \mathbf{x}^*(\mathbf{w}^i, q) \leq \mathbf{w}^i \cdot \mathbf{x}^*(\mathbf{w}, q), \ i = 1, 2.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} C(\mathbf{w}, q) &= C(\lambda\mathbf{w}^1 + (1-\lambda)\mathbf{w}^2, q) \\ &= \lambda\mathbf{w}^1 \cdot \mathbf{x}^*(\mathbf{w}, q) + (1-\lambda)\mathbf{w}^2 \cdot \mathbf{x}^*(\mathbf{w}, q) \\ &\geq \lambda\mathbf{w}^1 \cdot \mathbf{x}^*(\mathbf{w}^1, q) + (1-\lambda)\mathbf{w}^2 \cdot \mathbf{x}^*(\mathbf{w}^2, q) \\ &= \lambda C(\mathbf{w}^1, q) + (1-\lambda)C(\mathbf{w}^2, q). \end{aligned}$$

La última igualdad se cumple en virtud del inciso anterior.

9.17

a) El máximo $f_{\max}$ ocurre en $(x^*, y^*) = (16000, 64000)$. Además $f_{\max} = 50(16000)^{\frac{1}{2}}(64000)^2 = 2.590\,5 \times 10^{13}$

b) La distancia mínima $d_{\min}$ ocurre en los puntos $P_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{1.1} \\ \sqrt{1.1} \end{pmatrix}$ y $P_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{1.1} \\ -\sqrt{1.1} \end{pmatrix}$. Además $d_{\min} = \sqrt{2.2}$.

c) El máximo $f_{\max}$ ocurre en $(x^*, y^*) = (0, 4)$ con $f_{\max} = \ln 20$.

d) El mínimo $f_{\min}$ ocurre en $(x^*, y^*) = (5, 5)$ con $f_{\min} = 50$.

e) El máximo $f_{\max}$ ocurre en $(x^*, y^*, z^*) = (1, 2, 1)$ con $f_{\max} = 2$.

9.18

a) El lagrangiano es

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda_1, \lambda_2, A) = \frac{1}{3}\log x + \frac{1}{3}\log y - \lambda_1(3x + y - A) - \lambda_2(x + y - 40)$$

Las condiciones de Kuhn Tucker están dadas por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x &= \frac{1}{3x} - 3\lambda_1 - \lambda_2 \leq 0, \ x > 0, \ \left(\frac{1}{3x} - 3\lambda_1 - \lambda_2\right)x = 0, \\ \mathcal{L}_y &= \frac{1}{3y} - \lambda_1 - \lambda_2 \leq 0, \ y > 0, \ \left(\frac{1}{3y} - \lambda_1 - \lambda_2\right)y = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x + y - A \leq 0, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_1(3x + y - A) = 0, \\ x + y - 40 \leq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_2(x + y - 40) = 0 \end{aligned}$$

El ingreso se tiene que restringir al intervalo $(40, 120)$ porque si $A \leq 40$ entonces la segunda restricción será inútil. De forma similar, si $A \geq 120$, entonces la primera restricción del problema será inútil.

b) Si $A \in (40, 60)$, entonces $x^* = \frac{1}{6}A$, $y^* = \frac{1}{2}A$, $\lambda_1^* = \frac{2}{3A}$, $\lambda_2^* = 0$.

c) Si $A \in [60, 80]$, entonces $x^* = \frac{1}{2}A - 20$, $y^* = 60 - \frac{1}{2}A$, $\lambda_1^* = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{A-40} - \frac{1}{120-A}\right)$, $\lambda_2^* = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{120-A} - \frac{1}{A-40}\right)$.

d) Si $A \in (80, 120)$, entonces $x^* = y^* = 20$, $\lambda_1^* = 0$, $\lambda_2^* = \frac{1}{60}$.

9.19

La función valor es

$$V(A) = \frac{1}{3}\log x^* + \frac{1}{3}\log y^* =$$
$$\mathcal{L}(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, A) = \frac{1}{3}\log x^* + \frac{1}{3}\log y^* - \lambda_1^*(3x^* + y^* - A) - \lambda_2^*(x^* + y^* - 40).$$

El teorema de la envolvente dice que

$$V'(A) = \lambda_1^*.$$

Ahora bien, para los tres casos del problema anterior tenemos:

a) Si $A \in (40, 60)$, entonces

$$V(A) = \frac{1}{3}\log x^* + \frac{1}{3}\log y^* = \frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{6}A\right) + \frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{2}A\right),$$
$$V'(A) = \frac{2}{3A} = \lambda_1^*.$$

b) Si $A \in [60, 80]$, entonces

$$V(A) = \frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{2}A - 20\right) + \frac{1}{3}\log\left(60 - \frac{1}{2}A\right),$$
$$V'(A) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{A-40} - \frac{1}{120-A}\right) = \lambda_1^*.$$

c) Si $A \in (80, 120)$, entonces

$$V(A) = \frac{1}{3}\log 20 + \frac{1}{3}\log 20,$$
$$V'(A) = 0 = \lambda_1^*.$$

9.20

a) Elevar al cuadrado es una transformación creciente de manera que el vector (x^*, y^*, z^*, w^*) que minimiza la distancia es el mismo que minimiza la distancia al cuadrado. La función valor definida $V(\alpha)$ representa (el cuadrado) de la distancia mínima entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = \alpha x - 1$ para un valor dado de la pendiente α.

b) El lagrangiano del problema es

$$\mathcal{L}(x, y, z, w, \lambda_1, \lambda_2, \alpha) = (x - z)^2 + ((y - w)^2 - \lambda_1(-\alpha x + y + 1) - \lambda_2(w - z^2)$$

c) La función valor es

$$V(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\alpha| \geq 2 \\ \left(\frac{4-\alpha^2}{4\sqrt{1+\alpha^2}}\right)^2 & \text{si } |\alpha| < 2 \end{cases}$$

d)

$$V'(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\alpha| \geq 2 \\ \left(-\frac{4-\alpha^2}{2(1+\alpha^2)}\right)\left(\frac{\alpha(6+\alpha^2)}{4(1+\alpha^2)}\right) & \text{si } |\alpha| < 2 \end{cases}$$

Geométricamente, la recta es tangente a la parábola si $|\alpha| = 2$ y secante si $|\alpha| > 2$. En ambos casos la distancia mínima es = 0 y se tiene que

$$(x^*, y^*) = (z^*, w^*) = \left(\frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}, \left(\frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}\right)^2\right), \lambda_1^* = \lambda_2^* = 0$$

Si $|\alpha| < 2$, entonces la parábola y la recta no se cortan. La distancia mínima de la parábola a la recta sucede en el punto (z^*, w^*) en el cual se cumple que la tangente a la parábola tiene una pendiente igual a α. El problema puede resolverse explícitamente utilizando el lagrangiano obteniendo:

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{\alpha(6+\alpha^2)}{4(1+\alpha^2)}, \frac{\alpha^2(6+\alpha^2)}{4(1+\alpha^2)} - 1\right)$$

$$(z^*, w^*) = \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha^2}{4}\right),$$

$$\lambda_1^* = -\frac{4-\alpha^2}{2(1+\alpha^2)}, \lambda_2^* = \frac{4-\alpha^2}{2(1+\alpha^2)} \text{ si } |\alpha| < 2.$$

Así,

$$V'(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\alpha| \geq 2 \\ \lambda_1^* x^* & \text{si } |\alpha| < 2 \end{cases}$$

y se verifica el teorema de la envolvente.

9.21

El lagrangiano del problema es $\mathcal{L}(x, q, \lambda; w, p) = (pq - wx) - \lambda\,(f(x) - q)$. La función de máxima ganancia es la función valor. Por el teorema de la envolvente

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p}(w, p) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p}(x^*(w, p), q^*(w, p), \lambda^*(w, p)) = q^*(w, p)$$

y

$$\frac{\partial \Pi}{\partial w}(w, p) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w}(x^*(w, p), q^*(w, p), \lambda^*(w, p)) = -x^*(w, p).$$

9.22

El lagrangiano del problema es $\mathcal{L}(x, \lambda; \mathbf{p}, \bar{U}) = \mathbf{p}^T x - \lambda \left(U(x) - \bar{U}\right)$. La función de gasto es la función valor. Por el teorema de la envolvente

$$\frac{\partial E}{\partial p_j}(\mathbf{p}, \bar{U}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_j}(x^h(\mathbf{p}, \bar{U}), \lambda^*(\mathbf{p}, \bar{U})) = x_j^h(\mathbf{p}, \bar{U}).$$

9.23

(D1) En el óptimo del problema de minimización de gasto se cumple la restricción

$$U(x^h(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, m))) = V(\mathbf{p}, m) = U(x^*(\mathbf{p}, m)).$$

Si U es monótona creciente y cóncava entonces es también invertible y es posible cancelar U de ambos lados de la igualdad. Por lo tanto $x^h(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, m)) = x^*(\mathbf{p}, m)$.

(D2) En el óptimo del problema de maximización de utilidad se cumple la restricción

$$p^T x^*(\mathbf{p}, E(\mathbf{p}, \bar{U})) = E(\mathbf{p}, \bar{U}) = p^T x^h(\mathbf{p}, \bar{U}).$$

Como esto vale para $\mathbf{p}$ arbitraria, entonces $x^*(\mathbf{p}, E(\mathbf{p}, \bar{U})) = x^h(\mathbf{p}, \bar{U})$.

(D3) Por el inciso anterior y porque se cumple la restricción de Hicks se tiene que

$$V(\mathbf{p}, E(\mathbf{p}, \bar{U})) = U(x^*(\mathbf{p}, E(\mathbf{p}, \bar{U}))) = U(x^h(\mathbf{p}, \bar{U})) = \bar{U}.$$

(D4) Por el inciso anterior y porque se cumple la restricción de Marshall se tiene que

$$E(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, m)) = p^T x^h(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, m)) = p^T x^*(\mathbf{p}, m) = m.$$

9.24

a) $x(\mathbf{p}, m) = \frac{\alpha m}{p_1}$, $y(\mathbf{p}, m) = \frac{\beta m}{p_2}$.

b) $V(\mathbf{p}, m) = \log\left[\left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{p_2}\right)^\beta m\right]$.

c) $E(\mathbf{p}, \bar{U}) = \left(\frac{p_1}{\alpha}\right)^\alpha \left(\frac{p_2}{\beta}\right)^\beta e^{\bar{U}}$.

d) $x^h(\mathbf{p}, \bar{U}) = \left(\frac{\alpha p_2}{\beta p_1}\right)^\beta e^{\bar{U}}$, $y^h(\mathbf{p}, \bar{U}) = \left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2}\right)^\alpha e^{\bar{U}}$.

9.25

a) $x(\mathbf{p}, m) = m \frac{p_1^{\frac{1}{r-1}}}{p_1^{\frac{r}{r-1}} + p_2^{\frac{r}{r-1}}}$, $y(\mathbf{p}, m) = m \frac{p_2^{\frac{1}{r-1}}}{p_1^{\frac{r}{r-1}} + p_2^{\frac{r}{r-1}}}$.

b) $V(\mathbf{p}, m) = m\left[p_1^{\frac{r}{r-1}} + p_2^{\frac{r}{r-1}}\right]^{\frac{1-r}{r}}$.

c) $E(\mathbf{p}, \bar{U}) = \bar{U}\left[p_1^{\frac{r}{r-1}} + p_2^{\frac{r}{r-1}}\right]^{\frac{1-r}{r}}$.

d) $x^h(\mathbf{p}, \bar{U}) = \bar{U} p_1^{\frac{1}{r-1}} \left[p_1^{\frac{r}{r-1}} + p_2^{\frac{r}{r-1}}\right]^{-\frac{1}{r}}$, $y^h(\mathbf{p}, \bar{U}) = \bar{U} p_2^{\frac{1}{r-1}} \left[p_1^{\frac{r}{r-1}} + p_2^{\frac{r}{r-1}}\right]^{-\frac{1}{r}}$.

9.26

Se tiene que $x^*(\mathbf{p}, E(\mathbf{p}, \bar{U})) = x^h(\mathbf{p}, \bar{U})$. Entonces

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^*}{\partial m}\frac{\partial E}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^h}{\partial p_j}.$$

Por el lema de Shepard $\frac{\partial E}{\partial p_j} = x_j^h$, y como

$$\bar{U} = V(\mathbf{p}, m), m = E(\mathbf{p}, \bar{U}) y x_j^h(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, m)) = x_j^*(\mathbf{p}, m),$$

entonces

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} + x_j^*\frac{\partial x_i^*}{\partial m} = \frac{\partial x_i^h}{\partial p_j}.$$

9.27

a) No es convexo.

b) Un elefante dentro de una boa. En serio...