Soluciones del capítulo 10
Introducción al cálculo en variaciones

Héctor Lomelí y Beatriz Rumbos

February 26, 2010

10.1

a. Veamos que $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ cumple las propiedades de una norma:

- **(i)** $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ se tiene que $|x_i| \geq 0$. Por lo tanto, $\sum_{i=1}^n |x_i| \geq 0$. Entonces $\|\mathbf{x}\|_1 \geq 0$.
- **(ii)** $|x_i| = 0$ si y sólo si $x_i = 0$. Por lo tanto, $\sum_{i=1}^n |x_i| = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} = 0$. Entonces $\|\mathbf{x}\|_1 = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} = 0$.
- **(iii)** $\|c\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |cx_i| = \sum_{i=1}^n |c|\,|x_i| = |c| \sum_{i=1}^n |x_i| = |c|\,\|\mathbf{x}\|_1$
- **(iv)** $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{y}\|_1$

b. Se quiere demostrar que $\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup\{|x_i|, i = 1, 2, \ldots, n\}$ es una norma.

- **(i)** $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ se tiene que $|x_i| \geq 0$. Por lo tanto $\sup\{|x_i|\} \geq 0$. Entonces $\|\mathbf{x}\|_\infty \geq 0$
- **(ii)** $\|\mathbf{x}\|_\infty = 0$ si y sólo si $\sup\{|x_i|\} = 0$. Esto se cumple si y sólo si se tiene que $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, $|x_i| = 0$. Esto se cumple siempre y cuando $x_i = 0\ \forall i = 1, 2, \ldots, n$. Es decir, $\|\mathbf{x}\|_\infty = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} = 0$.
- **(iii)** $\|c\mathbf{x}\|_\infty = \sup\{|cx_i|\} = \sup\{|c|\,|x_i|\} = |c| \sup\{|x_i|\} = |c|\,\|\mathbf{x}\|$.
- **(iv)** $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_\infty = \sup\{|x_i + y_i|\} \leq \sup\{|x_i| + |y_i|\} \leq \sup\{|x_i|\} + \sup\{|y_i|\} = \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty$.

10.2

Se demuestra que $\|f\|_p = \left\{\int_a^b |f(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}$ para $p = 1, 2$ es una norma.

a. La integral de una función no negativa es un número no negativo. Por lo tanto, $\|f\|_p \geq 0$

b. La integral de una función no negativa es igual a 0 si y sólo si la función es igual a 0 en todos sus puntos. Por lo tanto $\|f\|_p = 0$ si y solo sí $f = 0$.

c. $\|cf\|_p = \left\{\int_a^b |cf(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{|c|^p \int_a^b |f(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} = |c|\|f\|_p$.

d. Si $p = 1$ entonces

$$\begin{aligned}\|f+g\|_1 &= \int_a^b |f(t)+g(t)|dt \leq \int_a^b (|f(t)|+|g(t)|)dt \\ &= \int_a^b |f(t)|dt + \int_a^b |g(t)|dt = \|f\|_1 + \|g\|_1.\end{aligned}$$

Si $p = 2$ entonces

$$\|f+g\|_2^2 = \int_a^b (|f+g|)^2 dt \leq \int_a^b (|f|+|g|)^2 dt = \int_a^b \left(|f|^2 + 2|f||g| + |g|^2\right) dt.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, se tiene que

$$\left|\left(\int_a^b fgdt\right)\right|^2 \leq \int_a^b |f|^2\, dt \int_a^b |g|^2\, dt$$

o bien

$$\left|\left(\int_a^b fgdt\right)\right| \leq \sqrt{\int_a^b |f|^2\, dt}\sqrt{\int_a^b |g|^2\, dt}.$$

De aquí se tiene que

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(|f|^2 + 2|f||g| + |g|^2\right) dt &\leq \int_a^b |f|^2 dt + \int_a^b |g|^2 dt + 2\sqrt{\int_a^b |f|^2 dt}\sqrt{\int_a^b |g|^2 dt} \\ &= \left(\sqrt{\int_a^b |f|^2 dt} + \sqrt{\int_a^b |g|^2 dt}\right)^2 = \left(\|f\|_2 + \|g\|_2\right)^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2.$$

10.3

a. Sea $V = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} | f \text{ es continua }\}$ Por demostrar que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

- **(i)** Sean $f, g \in V$. Como f, g son continuas en $[0,1]$, entonces $f+g$ es continua en $[0,1]$. Por lo tanto $(f+g) \in V$.
- **(ii)** Sean $f, g, h \in V$. Como la suma de funciones es asociativa $(f+g)+h = f+(g+h)$.
- **(iii)** $f(x) = 0$ es continua en $[0,1]$. Por lo tanto $f(x) = 0 \in V$.
- **(iv)** Sea $f \in V$. Como f es continua en $[0,1]$, entonces $-f$ es continua en $[0,1]$. Por lo tanto $-f \in V$. Además $f + (-f) = 0$.
- **(v)** Sean $f, g \in V$. Como la suma de funciones es conmutativa $f + g = g + f$.

(vi) Sea $f \in V$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Como f es continua en $[0,1]$, entonces αf es continua en $[0,1]$. Por lo tanto $\alpha f \in V$.

(vii) Sean $f, g \in V$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Claramente $\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g$.

(viii) Sea $f \in V$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Claramente $(\alpha+\beta)f = \alpha f + \beta f$.

(ix) Sea $f \in V$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Claramente $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$.

b. Dos ejemplos de funcionales lineales sobre V son: $J_1[f] = \int_0^1 f(t)dt$ y $J_2[f] = f(0)$.

c. Dos ejemplos de funcionales no lineales sobre V son: $J_1[f] = \int_0^1 f^2(t)dt$ y $J_2[f] = \left[\int_0^1 f(t)dt\right]^2$.

10.4

a. $x(t) = -\frac{1}{2}t + 20$. Por lo tanto $J[x] = -5$.

b. $x(t) = 9t + 10$. Por lo tanto $J[x] = -10710$.

c. $x(t) = t^3 + 4t + 1$. Por lo tanto $J[x] = \frac{1912}{5}$.

d. $x(t) = \frac{t^2}{4} + 4t + 1$. Por lo tanto $J[x] = \frac{154}{3}$.

e. $x(t) = t$. Por lo tanto $J[x] = \frac{8}{3}$.

f. $x(t) = \frac{11}{10}t$ y $y(t) = \frac{2}{5}t + 2$. Por lo tanto $J[x] = \frac{127}{10} + e^{10}$.

g. $x(t) = y(t) = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}}(e^t - e^{-t})$. Por lo tanto $J[x,y] = \frac{2(e^{\pi} - e^{-\pi})}{e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}}$.

h. $x(t) = t$. Por lo tanto $J[x] = 1$.

10.5

$x(t) = (A + 2B + Ct)e^t + (D - 2E + Et)e^{-t}$, $y(t) = (A + Bt)e^t + (d + Et)e^{-t}$.

10.6

$x(t) = \frac{t^2}{2} + \left(N - \frac{1}{2}\right)t$.

10.7

a. $x(t) = 4$. Como f es convexa en $(x, \dot{x})$, entonces se trata de un mínimo.

b. $x(t) = -t + 4$ o $x(t) = t + 4$, y $T = 1$. Como f es convexa en $(x, \dot{x})$, entonces se trata de un mínimo.

10.8

a. $x(t) = \frac{1}{4}t^2 - t + 1$. Como f es convexa en $(x, \dot{x})$, entonces se trata de un mínimo.

b. $x(t) = \frac{1}{4}t^2 - 4t$ y $T = 16$. Como f es convexa en $(x, \dot{x})$, entonces se trata de un mínimo.

10.9

Sustituyendo $K(t)$ y $\dot{K}(t)$ en la condición de transversalidad se tiene

$$\begin{aligned}
0 = \lim_{T\to\infty} & e^{-\rho T}\left[\alpha\left(\kappa_1 r_1 e^{r_1 T} + \kappa_2 r_2 e^{r_2 T}\right)^2\right. \\
& \left. + A\left(\kappa_1 e^{r_1 T} + \kappa_2 e^{r_2 T} + K_p\right) - B\left(\kappa_1 e^{r_1 T} + \kappa_2 e^{r_2 T} + K_p\right)^2\right] \\
= \lim_{T\to\infty} & (e^{(2r_1-\rho)T}\kappa_1^2\left[\alpha r_1^2 - B\right] + e^{(2r_2-\rho)T}\kappa_2^2\left[\alpha r_2^2 - B\right] \\
& + e^{(r_1+r_2-\rho)T} 2\kappa_1\kappa_2\left[\alpha r_1 r_2 - B\right] + e^{(r_1-\rho)T}\kappa_1\left[A - 2BK_p\right] \\
& + e^{(r_2-\rho)T}\kappa_2\left[A - 2BK_p\right] + e^{-\rho T}\left[AK_p - BK_p^2\right]).
\end{aligned}$$

Para que dicho límite converja es necesario que desaparezcan los términos divergentes $e^{(2r_1-\rho)T}$ y $e^{(r_1-\rho)T}$. Esto se logra haciendo $\kappa_1 = 0$.

10.10

$x(t) = \frac{t^2}{2}$ y $T = \sqrt{2N}$.

10.11

a. $x(t) = \left[x_0 - \left(\frac{1}{1-\rho^2}\right)\right] e^{-t} + \left(\frac{1}{1-\rho^2}\right) e^{-\rho t}$.

b. $H = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. De donde $|H| = 1 > 0$. Por lo tanto, f es cóncava en $(x, \dot{x})$, es decir que se trata de un máximo.

c. Sí, siempre que $\rho > 0$.

10.12

La trayectoria óptima de consumo es $c(t) = \left(rc_1 + w + \frac{\rho - r}{\beta r}\right) - \left(\frac{\rho - r}{\beta}\right) t$. Para verificar las condiciones de segundo orden se tiene que

$$H = \begin{pmatrix} -\beta^2 r^2 e^{-\rho t} e^{-\beta c} & -\beta^2 r e^{-\rho t} e^{-\beta c} \\ -\beta^2 r e^{-\rho t} e^{-\beta c} & -\beta^2 e^{-\rho t} e^{-\beta c} \end{pmatrix}$$

es negativa semidefinida. Por lo tanto, f es cóncava y la trayectoria es un máximo.

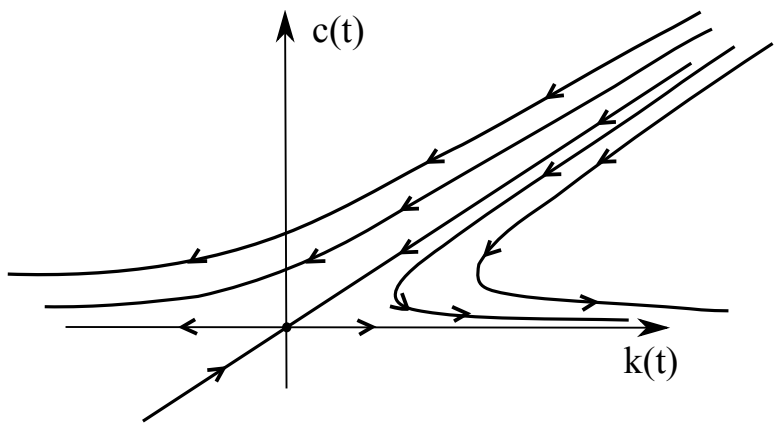
10.13

a. $c(t) = k_0 \rho e^{(A-\delta-\rho)t}$ y $k(t) = k_0 e^{(A-\delta-\rho)t}$, con $A - \delta - \rho < 0$. Las condiciones de transversalidad son

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{c} e^{-\rho t} = 0,$$
$$\lim_{t\to\infty} \left(\log c + \frac{\dot{k}}{c} \right) e^{-\rho t} = 0.$$

b. El sistema de ecuaciones resultante es el siguiente sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} \dot{k} \\ \dot{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-\delta & -1 \\ 0 & A-\delta-\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ c \end{pmatrix}$$



c. Como el sistema es lineal, el único punto de equilibrio es $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Como el determinante del sistema es negativo se trata de un punto silla.

d. La variedad estable W^s es la recta $c = \rho k$. Debido a las condiciones de transversalidad, cualquier condición inicial tal que $c_0 = \rho k_0$ llevará al sistema al punto $\begin{pmatrix} k^* \\ c^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a lo largo de W^s.

10.14

La función $f(x, \dot{x})$ no depende explícitamente de t y $x(t)$ es solución de

$$f_x - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}} = 0$$

Considerar $H(x, \dot{x}) = f - \dot{x} f_{\dot{x}}$. Entonces

$$\frac{dH}{dt} = f_x \dot{x} + f_{\dot{x}} \ddot{x} - \dot{x} \left(\frac{d}{dt} f_{\dot{x}} \right) - \ddot{x} f_{\dot{x}} = \dot{x} \left(f_x - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}} \right) = 0.$$

Por lo tanto, H es una constante.

10.15

Se tiene$f(x) = x^2(x-1)^2 + \dot{x}^2$, Por el ejercicio anterior:

$$H(x, \dot{x}) = x^2(x-1)^2 + \dot{x}^2 - 2\dot{x}^2 = x^2(x-1)^2 - \dot{x}^2 = cte.$$

La condición de transversalidad

$$\lim_{T\to\infty} (f - \dot{x} f_{\dot{x}})_{t=T} = 0 = \lim_{T\to\infty} H(x, \dot{x})_{t=T}$$

implica que la constante $cte = 0$. De aquí

$$x^2(x-1)^2 - \dot{x}^2 = 0$$

se reescribe como

$$\dot{x}^2 = x^2(x-1)^2$$

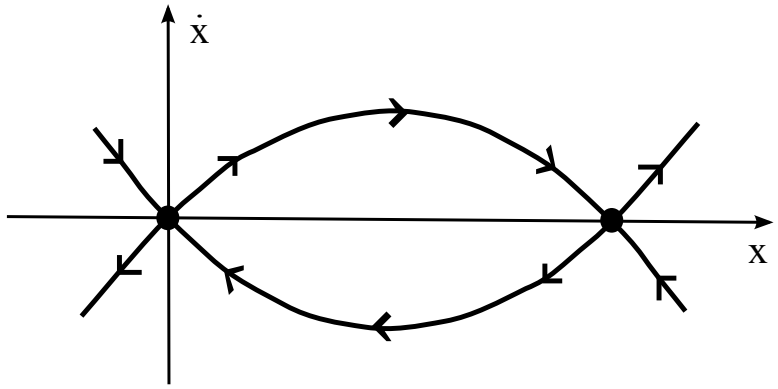
o bien,

$$\dot{x} = \pm x(x-1) = \begin{cases} x^2 - x \\ x - x^2 \end{cases} \tag{1}$$

Éstas son ecuaciones Bernoulli cuya solución es

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{1+Ae^t} \\ \frac{1}{1+Ae^{-t}} \end{cases}$$

con $A = \frac{1}{x_0} - 1$. El diagrama de fase para 1 está dado por



y de él se infiere la dinámica para las condiciones iniciales solicitadas. Se tienen por lo tanto, dos posibles soluciones:

$$u(t) = \frac{x_0}{x_0 + (1-x_0)e^t},$$

y

$$v(t) = \frac{x_0}{x_0 + (1-x_0)e^{-t}}.$$

Si $x_0 < 1$, se puede ver que u es una función definida para todo $t > 0$ y además se cumple $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$. Por otro lado, si $x_0 > 0$, v es una función definida para todo $t > 0$ y además

se cumple $\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$. Por lo tanto, la solución es única si $x_0 \leq 0$ o $x_0 \geq 1$. Resta, en todo caso, definir cuál es la solución que nos da un mínimo si $0 < x_0 < 1$. Para ello calculamos la función valor. Sea

$$J[x] = \int_0^\infty \left[x^2(x-1)^2 + (\dot{x})^2\right]\, dt.$$

Entonces, debemos comparar $J[u]$ con $J[v]$, cuando $0 < x_0 < 1$. Notemos que

$$(\dot{u})^2 = u(u-1)\dot{u} = u^2(u-1)^2$$

y

$$(\dot{v})^2 = v(1-v)\dot{v} = v^2(v-1)^2.$$

Por lo tanto,

$$J[u] = \int_0^\infty [2u(u-1)\dot{u}]\, dt, \quad \text{y} \quad J[v] = \int_0^\infty [2v(1-v)\dot{v}]\, dt.$$

Se puede hacer un cambio de variable en ambas integrales y obtener

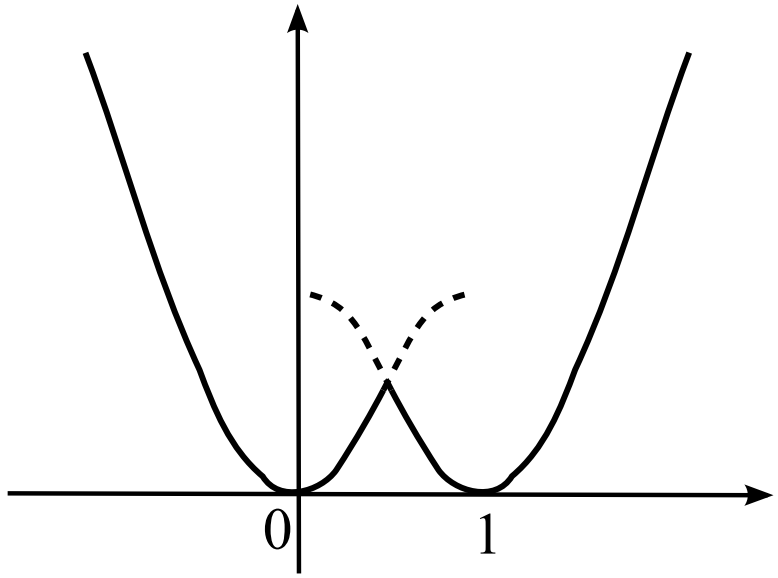
$$J[u] = \int_{x_0}^0 [2u(u-1)]\, du = \frac{1}{6}x_0^2(3-2x_0),$$

$$J[v] = \int_{x_0}^1 [2v(1-v)]\, dv = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}x_0^2(2x_0-3).$$

Comparando ambos valores, se puede ver que si $x_0 \in (0, 1/2]$, se debe escoger u y si $x_0 \in [1/2, 1)$, se debe escoger v. Por lo tanto, el valor del mínimo es

$$V(x_0) = \begin{cases} \frac{1}{6}x_0^2(3-2x_0), & x_0 \leq 1/2, \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{6}x_0^2(2x_0-3), & x_0 \geq 1/2. \end{cases}$$

Una gráfica de V se muestra a continuación.



10.16

a.

$$\begin{aligned}\frac{d(u(c)+u'(c)(f(k)-c-\delta k))}{dt} &= \frac{d(u(c)+u'(c)(\dot{k}))}{dt}\\ &= u'(c)\dot{c}+u''(c)\dot{c}(\dot{k})+u'(c)(\ddot{k})\\ &= u'(c)\dot{c}+u''(c)\dot{c}(\dot{k})+u'(c)(f'(k)\dot{k}-\dot{c}-\delta\dot{k})\\ &= (u'(c)(f'(k)-\delta)+u''(c)\dot{c})\dot{k}=0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $u(c)+u'(c)(f(k)-c-\delta k)$ es una constante.

b. Por el inciso anterior se tiene que

$$\begin{aligned}&u(c_0)+u'(c_0)(f(k_0)-c_0-\delta k_0)\\ &=u(c^*)+u'(c^*)(f(k^*)-c^*-\delta k^*).\end{aligned}$$

Sin embargo, la condición de transversalidad (si $\rho=0$) nos dice que

$$\lim_{t\to\infty} u'(c)=0=u'(c^*).$$

De esta forma se obtiene

$$\begin{aligned}u(c_0)+u'(c_0)(f(k_0)-c_0-\delta k_0)&=u(c^*),\\ \frac{u(c^*)-u(c_0)}{u'(c_0)}+c_0&=f(k_0)-\delta k_0.\end{aligned}$$

c. $W^s(k^*,c^*)$ consiste del conjunto de condiciones iniciales (k_0,c_0) tales que

$$\lim_{t\to\infty}(k(t),c(t))=(k^*,c^*),$$

de manera que se trata de aquellas que cumplen la relación del inciso anterior.