Soluciones del capítulo 11
Teoría de control

Héctor Lomelí y Beatriz Rumbos

13 de abril de 2012

11.1

a) $x(t) = 20 - \frac{1}{2}t$ y $u(t) = -\frac{1}{2}$. Se trata de un máximo.

b) $x(t) = -\frac{e^2}{1-e^2}e^{-t} + \frac{1}{1-e^2}e^t$ y $u(t) = \frac{2e^2}{1-e^2}e^{-t}$. Se trata de un mínimo.

c) $x(t) = -\frac{10}{11}t + 10$ y $u(t) = -\frac{10}{11}$. Se trata de un mínimo.

d) $x(t) = -\frac{1}{4}t^2 + t$ y $u(t) = -\frac{1}{2}t + 1$. Se trata de un máximo.

e)
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{t\sqrt{2}} + B \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t\sqrt{2}}$$
con
$$A = \frac{(1-\sqrt{2})^2 e^{-80\sqrt{2}}}{1+(1-\sqrt{2})^2 e^{-80\sqrt{2}}}, B = \frac{1}{1+(1-\sqrt{2})^2 e^{-80\sqrt{2}}}.$$
Se trata de un máximo.

f) $x(t) = -e^{2-t} + e^{2+t} + 5$ y $u(t) = 2e^{2-t} - 5$. Se trata de un máximo.

g) $x(t) = 30t$ y $u(t) = -10$. Se trata de un máximo.

11.2

a) $x(t) = \begin{cases} 7e^t - 2, & t \leq 4 - \ln 2 \\ (7 - 4e^{-4})e^t, & t > 4 - \ln 2 \end{cases}$ y $u(t) = \begin{cases} 2, & t \leq 4 - \ln 2 \\ 0, & t > 4 - \ln 2 \end{cases}$.

b) $x(t) = 4e^t$ y $u(t) = 0$.

c) $x(t) = 7e^t - 2$ y $u(t) = 2$.

11.3

Las trayectorias óptimas son
$$\begin{pmatrix} K(t) \\ I(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{\frac{3}{2}t} + B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-\frac{3}{2}t} + \begin{pmatrix} 4/9 \\ 2/9 \end{pmatrix}.$$
Si $K(5) = 10$ se tiene
$$A = \frac{86 + 4e^{-\frac{15}{2}}}{9\left(e^{\frac{15}{2}} - e^{-\frac{15}{2}}\right)}, \qquad B = -\frac{86 + 4e^{\frac{15}{2}}}{9\left(e^{\frac{15}{2}} - e^{-\frac{15}{2}}\right)}.$$

Si deja $K(5)$ libre entonces

$$A = \frac{-2 - 4e^{-\frac{15}{2}}}{9\left(e^{\frac{15}{2}} - e^{-\frac{15}{2}}\right)}, \qquad B = -\frac{-2 + 8e^{\frac{15}{2}}}{9\left(e^{\frac{15}{2}} - e^{-\frac{15}{2}}\right)}.$$

El equilibrio se trata de un punto silla dado que los valores propios $\lambda_{1,2} = \pm\frac{3}{2}$ son números reales de signo contrario.

11.4

La trayectoria óptima es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = K_1 \begin{pmatrix} -A + \sqrt{A^2 + \frac{A}{\alpha}} \\ 1 \end{pmatrix} e^{\sqrt{A^2+\frac{A}{\alpha}}t} + K_2 \begin{pmatrix} A + \sqrt{A^2 + \frac{A}{\alpha}} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\sqrt{A^2+\frac{A}{\alpha}}t} + \frac{B}{2A(1+\alpha A)} \begin{pmatrix} A \\ 1 + 2\alpha A \end{pmatrix},$$

en donde

$$K_1 = \frac{\left(p_0 - \frac{B(1+2\alpha A)}{2A(1+\alpha A)}\right) - \left(p_T - \frac{B(1+2\alpha A)}{2A(1+\alpha A)}\right) e^{\sqrt{A^2+\frac{A}{\alpha}}T}}{1 - 2e^{2\sqrt{A^2+\frac{A}{\alpha}}T}},$$

$$K_2 = \frac{\left(p_0 - \frac{B(1+2\alpha A)}{2A(1+\alpha A)}\right) - \left(p_T - \frac{B(1+2\alpha A)}{2A(1+\alpha A)}\right) e^{\sqrt{A^2+\frac{A}{\alpha}}T}}{1 - 2e^{-2\sqrt{A^2+\frac{A}{\alpha}}T}}.$$

11.5

$x(t) = 7e^t - 2$ y $u(t) = 2$.

11.6

$x(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e - e^{-1}}$ y $u(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{e - e^{-1}}$.

11.7

El tiempo mínimo es $T = 4$. Las trayectorias óptimas son $x(t) = -2t + 8$ y $u(t) = -1$.

11.8

$x(t) = -t + A$ y $u(t) = 1$ y $T = A$.

11.9

Sustituyendo con las condiciones iniciales $x_1(0) = x_2(0) = 0$ y las condiciones de transversalidad $\lambda_1(1) = \lambda_2(1) = 0$ se obtiene que las trayectorias óptimas son $x_1(t) = x_2(t) = u(t) = 0$. Además se trata de un mínimo.

11.10

La extracción óptima esta dada por

$$x(t) = \begin{cases} x_{\max}, & p(t) \geq p(T)e^{r(t-T)} \\ 0, & p(t) < p(T)e^{r(t-T)} \end{cases}$$

Notemos que $x(T) = x_{\max}$. De aquí se tiene que dependiendo de la trayectoria del precio $p(t)$, la mina opera a su capacidad máxima durante algunos periodos o bien deja de operar en otros. El tiempo óptimo se obtendría a partir de

$$A(T) - A(0) = \int_0^T \dot{A} dt = -\int_0^T x dt,$$

o bien $A_0 = \displaystyle\int_0^T x(t)dt$.

11.11

Se tiene:

$$h = \begin{cases} 0 \text{ si } x < x^* \\ f(x^*) \text{ si } x = x^* \\ p_{\max} \text{ si } x > x^* \end{cases}$$

En donde $0 < x^* < K$ satisface

$$f'(x^*) - \frac{c'(x^*)f(x^*)}{p - c(x^*)} = \rho.$$

(Ver "The economics of fishing and modern capital theory: a simplified approach", Journal of environmental economics and managment, 2, 92-106, 1975.)

11.12

a) La trayectoria óptima satisface

$$\begin{pmatrix} a(t) \\ c(t) \end{pmatrix} = K_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{rt} + K_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2\rho - r \end{pmatrix} e^{2(r-\rho)t} + \begin{pmatrix} \frac{c^* - w}{r} \\ c^* \end{pmatrix},$$

en donde$c^* = 0$ si $r \neq \rho$ y $c^* > 0$ si $r = \rho$ y

$$K_1 = \frac{(c^* - \frac{w}{r})(e^{100(r-\rho)} - 1)}{e^{50r} - e^{100(r-\rho)}}, \qquad K_2 = \frac{(c^* - \frac{w}{r})(1 - e^{50r})}{e^{50r} - e^{100(r-\rho)}}.$$

b) El sistema está dado por:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= ra - c + w, \\ \dot{c} &= 2(r - \rho)c. \end{aligned}$$

Si $r > \rho$ se tiene que el punto fijo $(-\frac{w}{r}, 0)$ es un nodo repulsor, si $r < \rho$ se trata de un punto silla y si $r = \rho$ el punto $(0, c^*)$ es también un nodo repulsor. Dado que $a(0) = 0$, $a(t) = 0$ en todo momento y $c^* = w$.

c) Calculando el valor presente de la restricción presupuestal escrita como $w - c = \dot{a} - ar$ se obtiene[1]:

$$\int_0^\infty (w-c)e^{-rt}dt = \int_0^\infty (\dot{a} - ra)e^{-rt}dt$$
$$= \int_0^\infty \frac{d}{dt}((ae^{-rt})\, dt = -a(0)e^{-r0} + \lim_{t\to\infty} a(t)e^{-rt} = \lim_{t\to\infty} a(t)e^{-rt}.$$

Entonces, usando la condición de *no juego de Ponzi* $\lim_{t\to\infty} a(t)e^{-rt} = 0$ resulta

$$\int_0^\infty (w-c)e^{-rt}dt = 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^\infty we^{-rt}dt = \int_0^\infty ce^{-rt}dt.$$

11.13

$$x(t) = \frac{1}{2}ax_1e^{-t/a}\left((-1+\cot\frac{T}{a})\cos\frac{t}{a} + (1+\cot\frac{T}{a})\sin\frac{t}{a}\right) + u(t).$$

11.14

a) $\dot{m} = y - c$ y $\frac{\dot{u_c}}{u_c} = \pi + \rho - \frac{u_m}{u_c}$. El único punto fijo esta dado por $c^* = y$ y

$$u_c(c^*, m^*)(\rho + \pi) = u_m(c^*, m^*)$$

y se trata de un punto silla.

b) $\dot{m} = y - c$ y $\dot{c} = (u_{cc}[-u_m + u_c(\rho + \pi)])^{-1}$.

c) $\dot{m} = y - c - m\pi$ y $\dot{c} = (u_{cc}[-u_m + u_c(\rho + \pi)])^{-1}$. El único punto fijo esta dado por $c^* = y - m^*\pi$ y $u_c(c^*, m^*)(\rho + \pi) = u_m(c^*, m^*)$.

11.15

Las gráficas de las funciones se ilustran en la figura 1.

11.16

a) Las trayectorias óptimas del capital y el consumo están dadas por $\dot{k} = f(k) + T - c(1+\tau)$ y $\dot{c} = \frac{u'}{u''}[\rho - f'(k)]$. Incorporando la restricción presupuestal $T = \tau c$, la trayectoria del capital vuelve a ser $\dot{k} = f(k) - c$.

b) Las trayectorias óptimas del capital y el consumo están dadas por $\dot{k} = (1+\gamma)f(k) - c - \chi$ y $\dot{c} = \frac{u'}{u''}[\rho - (1+\gamma)f'(k)]$. Se observa que la tasa real que observan los individuos está dada por $(1+\gamma)f'(k)$. Incorporando la restricción presupuestal $\gamma f(k) = \chi$, la trayectoria del capital vuelve a ser: $\dot{k} = f(k) - c$.

c) Las trayectorias óptimas del consumo y el capital están dadas por $c(t) = \begin{cases} f(k), & \lambda \leq 1 \\ 0, & \lambda > 1 \end{cases}$ y $\dot{k} = \begin{cases} 0, & \lambda \leq 1 \\ f(k), & \lambda > 1 \end{cases}$. Por su parte la variable de coestado esta descrita por $\dot{\lambda} = \lambda(\rho - f'(k))$. Los puntos fijos son $(k, c) = (k^*, f(k^*))$ con $f'^*) = \rho$ y $\lambda \leq 1$.

[1] Para que esto tenga sentido, en esta parte hay que tomar $w = w(t)$; es decir, el salario no es constante.

11.17

a) $\dot{c} = c[\alpha A e^{\mu t} k^{\alpha-1} - \rho]$ y $\dot{k} = A e^{\mu t} k^{\alpha} - c$.

b) Si $\dot{c}/c = g$, entonces $\alpha A e^{\mu t} k^{\alpha-1} - \rho = g$. Por lo tanto,

$$k = \left(\frac{q+\alpha}{\alpha A}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} e^{\frac{\mu}{1-\alpha}t} \quad \text{y} \quad \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\mu}{1-\alpha}.$$

Por su parte,

$$\dot{y} = \mu A e^{\mu t} k^{\alpha} + \alpha A e^{\mu t} k^{\alpha-1}\dot{k} = y\left(\mu + \alpha\frac{\dot{k}}{k}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\dot{y}}{y} = \mu + \alpha\frac{\dot{k}}{k} = \mu + \alpha\frac{\mu}{1-\alpha} = \frac{\mu}{1-\alpha}.$$

Finalmente

$$c = y + \dot{k} = y + k\frac{\mu}{1-\alpha} = A e^{\mu t}\left(\left(\frac{q+\alpha}{\alpha A}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} e^{\frac{\mu}{1-\alpha}t}\right)^{\alpha} + \frac{\mu}{1-\alpha}\left(\frac{q+\alpha}{\alpha A}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} e^{\frac{\mu}{1-\alpha}t}$$

$$= \left(A\left(\frac{q+\alpha}{\alpha A}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + \frac{\mu}{1-\alpha}\left(\frac{q+\alpha}{\alpha A}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right) e^{\frac{\mu}{1-\alpha}t}$$

Concluimos

$$g = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\mu}{1-\alpha} = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{y}}{y}.$$

11.18

a) $\dot{k} = k^{\alpha} - c$ y $\dot{c} = \alpha c k^{\alpha-1}$. Como $\dot{c}$ es positiva el consumo crece en el tiempo.

b) En el modelo usual, la condición del consumo cambia por $\dot{c} = c(\alpha k^{\alpha-1} - \rho)$. En este caso, el consumo no aumenta necesariamente, ya que el consumo futuro es menos valioso. El consumo únicamente aumenta cuando la tasa real es mayor a la tasa de descuento subjetivo.

11.19

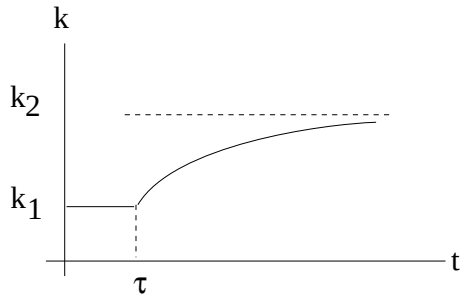
a) La evolución del consumo esta descrita por $\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}\left[(1-\tau)(1-\alpha)\left(\frac{G}{K}\right)^{\alpha} - \rho\right]$.

b) Sustituyendo con la restricción presupuestal del gobierno se obtiene la tasa de crecimiento $\gamma = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}\left[(1-\tau)(1-\alpha)\tau^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \rho\right]$.

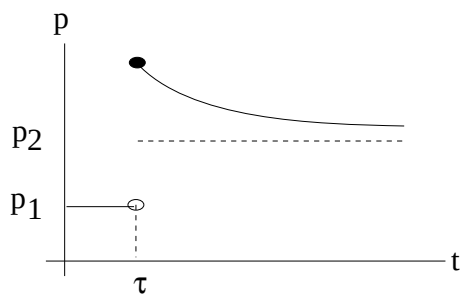
c) La tasa de crecimiento se maximiza con $\tau = \alpha$.

d) La evolución del consumo esta dada por $\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}\left[(1-\alpha)\left(\frac{G}{K}\right)^{\alpha} - \rho\right]$ y el gasto óptimo esta dado por $G = k\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

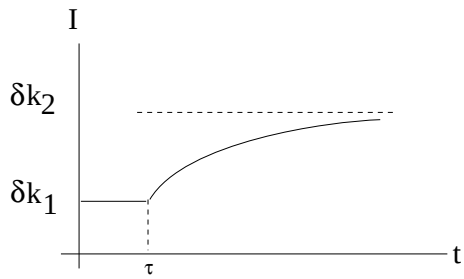
e) El consumo crece a tasa constante $\gamma = \frac{1}{\sigma}\left((1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \rho\right)$.



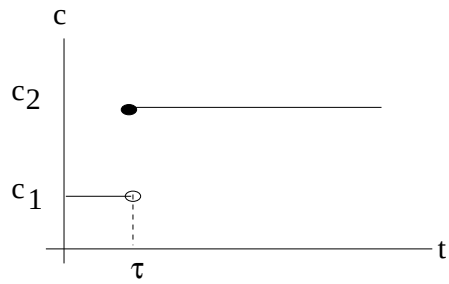
(a)



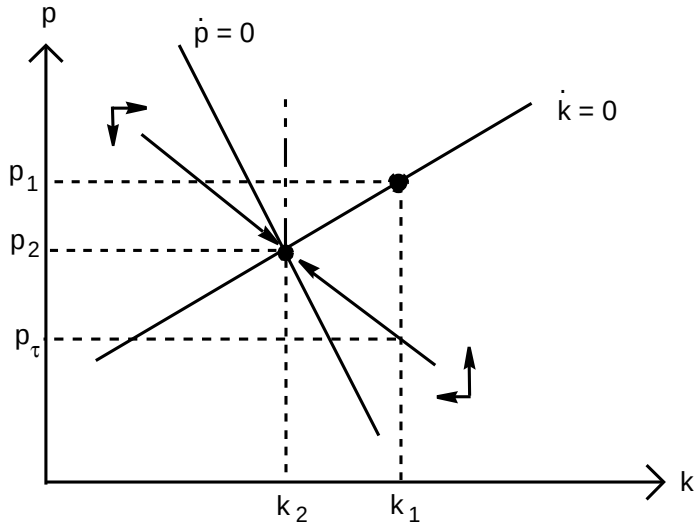
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 1: Diagramas para el problema 11.15