Soluciones del capítulo 12
Problemas de control con restricciones

Héctor Lomelí y Beatriz Rumbos

5 de mayo de 2010

12.1

$$
\begin{aligned}
u^*(t) &= c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \\
v^*(t) &= x^*(t) = c_1 e^t - c_2 e^{-t} + c_3, \\
y^*(t) &= c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 t + c_4.
\end{aligned}
$$

12.2

El problema se plantea como:

$$\min \int_0^1 \sqrt{1+u^2}\,dt$$

sujeto a

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= u, \\
\dot{y} &= x, \\
x(0) = 1,\, x(1) &= 2,\, y(0) = 0,\, y(1) = A,
\end{aligned}
$$

en donde se define $y(t)$ como

$$y(t) = \int_0^t x\,d\tau.$$

La curva de longitud mínima es $x(t) = -\frac{1}{c_1}\sqrt{1-(c_1 t - c_2)^2} + c_3$. Las constantes se obtienen con las condiciones $x(0) = 1$, $x(1) = 2$ y $\int_0^1 x(t)dt = A$.

12.3

$$
\begin{aligned}
u^*(t) &= c_1 t + c_2, \\
x^*(t) &= \frac{c_1}{2}t^2 + c_2 t + \frac{A}{T} - \frac{T^2 c_1}{6} - \frac{T c_2}{2}, \\
y^*(t) &= \frac{c_1}{6}t^3 + \frac{c_2}{2}t^2 + \left(\frac{A}{T} - \frac{T^2 c_1}{6} - \frac{T c_2}{2}\right) t.
\end{aligned}
$$

12.4

La tasa de extracción óptima es $Q(t) = \frac{\rho}{\gamma} S e^{-\frac{\rho}{\gamma}t}$ y las reservas restantes son $x(t) = S e^{-\frac{\rho}{\gamma}t}$.

12.5

Q y x son tales que,

$$\begin{aligned} c'(Q) &= P - Ae^{rt}, \\ \dot{x} &= -Q, \\ x(0) &= S, \lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \end{aligned}$$

en donde A es una constante por determinar a partir de las condiciones de transversalidad.

12.6

a) El problema puede verse como un problema con un control I, un estado K, la restricción $I_{\min} \leq I \leq I_{\max}$. El hamiltoniano asociado (en tiempo corriente) es

$$H = \frac{1}{\alpha} K^{\alpha} - qI + \lambda(I - \delta K)$$

y las condiciones de primer orden, tomando en cuenta que I aparece en forma lineal, son

$$\begin{aligned} I &= \begin{cases} I_{\min} \text{ si } \lambda < q \\ I_{\max} \text{ si } \lambda > q \end{cases} \\ \dot{\lambda} &= -H_K + \lambda r = -K^{\alpha-1} + \lambda\delta + \lambda r, \\ \dot{K} &= H_\lambda = I - \delta K, \end{aligned}$$

Analizando la relación entre λ y q tenemos los siguientes casos:

1. $\lambda < q \Rightarrow I^* = I_{\min}$ y se tiene

$$\dot{K} = I_{\min} - \delta K, \ \dot{\lambda} = \lambda(r+\delta) - K^{\alpha-1}. \tag{1}$$

2. $\lambda = q \Rightarrow I^* \in [I_{\min}, I_{\max}]$ de manera que

$$\dot{K} = I - \delta K, \ \dot{\lambda} = \lambda(r+\delta) - K^{\alpha-1}. \tag{2}$$

3. $\lambda > q \Rightarrow I^* = I_{\max}$y se cumple

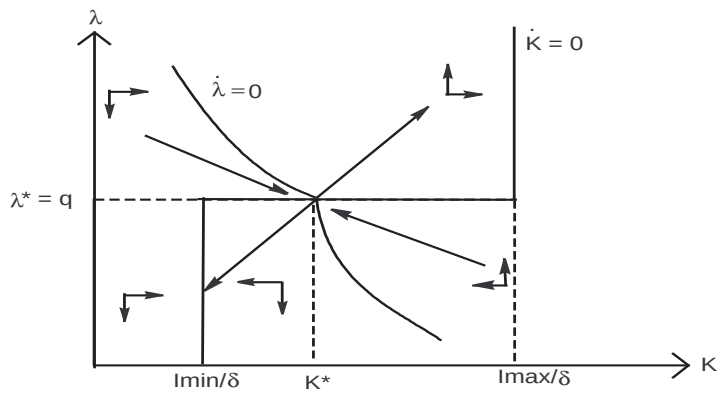
$$\dot{K} = I_{\max} - \delta K, \ \dot{\lambda} = \lambda(r+\delta) - K^{\alpha-1}. \tag{3}$$

b) La figura es escencialmente la misma que la del ejemplo 12.3.1, alrededor del punto fijo:

$$(K^*, \lambda^*) = \left([q(r+\delta)]^{\frac{1}{\alpha-1}}, q\right).$$

Si $K_0 < K^*$, entonces $\lambda > q$ y por lo tanto de 3 se resuelve para K :

$$K(t) = \left(K_0 - \frac{I_{\max}}{\delta}\right) e^{-\delta t} + \frac{I_{\max}}{\delta}.$$



El tiempo terminal T^* es tal que

$$K^* = \left(K_0 - \frac{I_{\max}}{\delta}\right) e^{-\delta T^*} + \frac{I_{\max}}{\delta},$$

es decir,

$$T^* = \frac{1}{\delta} \ln \left[\frac{\left(K_0 - \frac{I_{\max}}{\delta}\right)}{\left(K^* - \frac{I_{\max}}{\delta}\right)} \right].$$

Analogamente, si $K_0 > K^*$, entonces $\lambda < q$ y se tiene que

$$K(t) = \left(K_0 - \frac{I_{\min}}{\delta}\right) e^{-\delta t} + \frac{I_{\min}}{\delta},$$

con lo cual

$$T^* = \frac{1}{\delta} \ln \left[\frac{\left(K_0 - \frac{I_{\min}}{\delta}\right)}{\left(K^* - \frac{I_{\min}}{\delta}\right)} \right].$$

12.7

a) Sean u^*, x^*, λ^* óptimos. Éstos cumplen las condiciones necesarias de primer orden dadas por:

$$\begin{aligned}
u &= \begin{cases} 0 \text{ si } 4 - t + \lambda < 0 \\ 2 \text{ si } 4 - t + \lambda > 0 \end{cases}, \\
u &\in [0, 2] \text{ si } 4 - t + \lambda = 0, \\
\dot{\lambda} &= \mu, \\
\dot{x} &= u, \\
\mu &\geq 0, x - t - 1 \leq 0, \mu(x - t - 1) = 0, \\
x(0) &= 0, x(3) = 3.
\end{aligned}$$

En $t = 0$ se tiene que

$$x(0) = 0 \Longrightarrow x(0) - 0 - 1 = -1 < 0 \Longrightarrow \mu(0) = 0$$

y por lo tanto, la condición $\dot{\lambda} = \mu$ implica que λ es inicialmente constante, digamos en un intervalo $[0, t_1]$ con $t_1 > 0$. Si inicialmente $u(0) < 2$, la constante $\lambda = \lambda(0)$ cumpliría

$$\begin{aligned} 4 - 0 + \lambda(0) &\leq 0, \\ \lambda(0) &\leq -4. \end{aligned}$$

y λ tendría una discontinuidad en t_1. De aquí que se tenga que en $t = 0$ se cumple $u(0) = 2$ y $x(t) = 2t$. En $t = 1$ se tiene

$$\begin{aligned} 2 &= x(1), \\ x(1) - 1 - 1 &= 0, \end{aligned}$$

activándose así la restricción, de esta forma en el intervalo $0 \leq t < 1$:

$$u(t) = 2, x(t) = 2t.$$

b) En algún intervalo $[1, t_2)$, $1 < t_2 < 3$, la restricción sigue activa y por lo tanto $x(t) = t + 1$. Asimismo,

$$x(2) = 3 = x(3)$$

de forma que $t_2 = 2$ y como $\dot{x} = u \geq 0$ deben cumplirse

$$\begin{aligned} &u(t) = 0, \ x(t) = 3 \\ &\text{si } 2 \leq t \leq 3. \end{aligned}$$

c) En $t = 1$ se cumple

$$\begin{aligned} \dot{x}(1^-) &= 2, \\ \dot{x}(1^+) &= 1, \end{aligned}$$

de manera que u cambia su valor a $u = 1$ en $[1, 2)$ y se tiene un problema de control singular. Finalmente, se tiene

$$\lambda(1^+) = 1 - 4 = -3.$$

La continuidad de λ implica que el valor constante de λ en el intervalo $[0, 1)$ también es -3. Como $u = 1 \in (0, 2)$ cuando $1 \leq t < 2$, se tiene que

$$\lambda(t) = t - 4 \text{ si } 1 \leq t < 2.$$

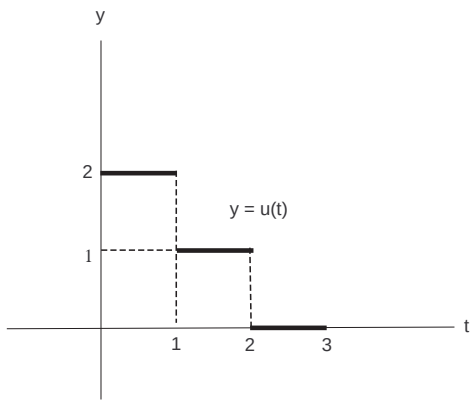
Si $2 \leq t \leq 3$ la restricción se desactiva, una vez más $\mu = 0$ y λ se vuelve constante, misma que por continuidad debe ser

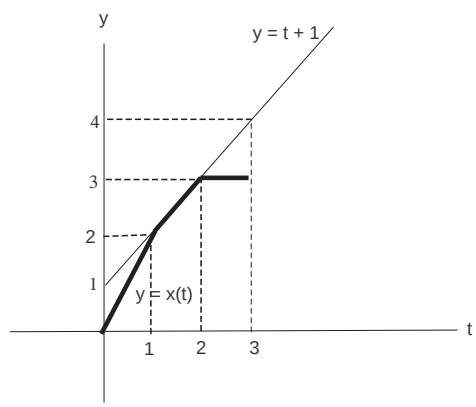
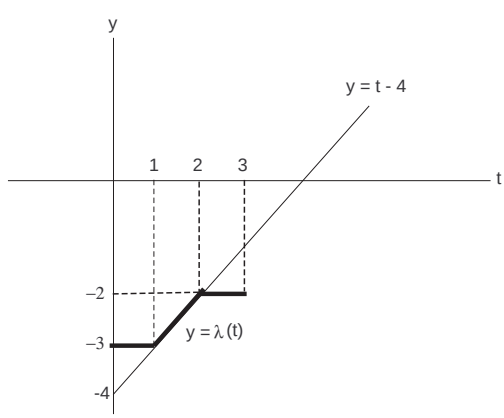
$$\lambda(t) = -2 \text{ si } 2 \leq t \leq 3.$$

12.8

a) $x(t) = -t^2 + 3t + 10.$
$u(t) = -2t + 3.$
$\lambda(t) = 4t - 6.$

b) $x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{T}{2}t + 2.$
$u(t) = -t + \frac{T}{2}.$
$\lambda(t) = 2t - T.$





d)