Soluciones del capítulo 13
Elementos de programación dinámica

Héctor Lomelí y Beatriz Rumbos

6 de abril de 2011

13.1

a) $\mathcal{L} = \sum_{k=0}^{T} f_k(u_k, x_k) - \sum_{k=0}^{T} \lambda_{t+1}(x_{k+1} - g_k(x_k, u_k))$. Las condiciones de primer orden son $\nabla\mathcal{L} = 0$. Derivando con respecto a u_k se obtiene $\frac{\partial f_k}{\partial u_k} = \lambda_{t+1}\frac{\partial g_k}{\partial u_k}$. Derivando con respecto a x_k se obtiene $\lambda_k = \frac{\partial f_k}{\partial x_k} + \lambda_{t+1}\frac{\partial g_k}{\partial x_k}$. Derivando con respecto a los multiplicadores λ_k se obtiene $x_{k+1} = g_k(u_k, x_k)$.

b) Por el teorema de la envolvente, los multiplicadores se pueden interpretar como el valor sombra del estado dado por la restricción $x_{k+1} = g_k(u_k, x_k)$. En efecto, definiendo la función valor $V(x_k) = \lambda_k$, las condiciones del inciso anterior son idénticas a las condiciones del teorema 13.2.1.

13.2

a) $x = (600, 511.26, 429.04, 353.37, 284.29, 221.86, 166.15, 117.22, 75.15, 39.92, 9.98)$.
$y = (88.73, 82.22, 75.67, 69.08, 62.43, 55.72, 48.9, 42.07, 35.23, 29.94)$.

b) $x = (600.00, 531.80, 429.55, 312.55, 202.12, 114.52, 56.06, 23.41, 8.26, 2.45, 0.61)$.
$y = (68.20, 102.25, 117.00, 110.43, 87.60, 58.46, 32.64, 15.15, 5.81, 1.84)$.

c) $x = (600.00, 301.57, 95.96, 25.65, 6.52, 1.64, 0.41, 0.10, 0.03, 0.01, 0.00)$.
$y = (298.43, 205.61, 70.31, 19.13, 4.89, 1.23, 0.31, 0.08, 0.02, 0.00)$.

13.3

a) La condición de primer orden para la mano de obra es $\frac{\partial F}{\partial l_t} = w_t$. Significa que se debe contratar una mano de obra l_t tal que su producto marginal sea igual a su precio unitario w_t. La condición de primer orden para el capital (y la inversión) es $\frac{\partial F}{\partial k_t} = r + \delta$. Significa que se debe invertir para mantener un capital k_t tal que su producto marginal sea igual a su precio unitario r mas su depreciación δ.

13.4

Sea $x_t = \sum_{k=t}^{T} u_k$. El problema puede reescribirse como $\max \sum_{t=0}^{T} w_t u_t^2$ sujeto a $x_{t+1} = x_t - u_t$ con $x_0 = C$ y $x_{T+1} = 0$. Usando las ecuaciones de Euler (13.15), se obtiene que $u_{t+1} w_{t+1} = u_t w_t$ y esto implica que existe una constante ζ tal que $u_t = \zeta / w_t$. El valor de ζ se ajusta para que se cumpla $\sum_{t=0}^{T} u_t = C$. Por lo tanto, la solución es $u_t = \left(\sum_{k=0}^{T} \frac{1}{w_k} \right)^{-1} \frac{C}{w_t}$.

13.5

Sea $x_t = \sum_{k=t}^{T} u_k$. El problema puede reescribirse como $\max \sum_{t=0}^{T} \frac{s_t p_t}{s_t + u_t}$ sujeto a $x_{t+1} = x_t - u_t$ con $x_0 = C$ y $x_{T+1} = 0$. Usando las ecuaciones de Euler (13.15), se obtiene que existe una constante ζ tal que

$$\frac{p_t s_t}{(s_t + u_t)^2} = \frac{p_{t+1} s_{t+1}}{(s_{t+1} + u_{t+1})^2} = \zeta.$$

Por tanto, se cumple que $u_t = \zeta \sqrt{p_t s_t} - s_t$. El valor de ζ se ajusta para que se cumpla $\sum_{t=0}^{T} u_t = C$. Por lo tanto, la a solución es

$$u_t = \left(\frac{C + \sum_{k=0}^{T} s_k}{\sum_{k=0}^{T} \sqrt{p_k s_k}} \right) \sqrt{p_t s_t} - s_t.$$

13.6

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \beta(f'(k_{t+1}) - \delta) = \frac{1 + r_{t+1} - \delta}{1 + \rho}.$$

13.7

a) De las ecuaciones de Euler (13.15), se obtiene que $c_{t+1} = \gamma c_t$, donde $\gamma = [\beta(1+r)]^2$. De este modo, se obtiene el siguiente sistema dinámico lineal.

$$\begin{pmatrix} w_{t+1} \\ c_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r+1) & -(r+1) \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_t \\ c_t \end{pmatrix}.$$

Para poder obtener una solución al problema de optimización, se requiere que el sistema converja al punto fijo $(0,0)$. Dado que w_0 está fijo, esto sólo se logra si se ajusta c_0 de modo que (w_0, c_0) sea un punto en la variedad estable correpondiente. Se tiene, por tanto, que $c_0 = \left(1 - \frac{\gamma}{1+r}\right) w_0$.

b) Del inciso anterios tenemos que el consumo óptimo satisface $c_t = \gamma^t \left(1 - \frac{\gamma}{1+r}\right) w_0$. Sustituyendo en el valor presente de la utilidad, se tiene que

$$V(w_0) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \sqrt{c_t} = \left(\sum_{t=0}^{\infty} (\beta^2(1+r))^t \right) \sqrt{\left(1 - \frac{\gamma}{1+r}\right) w_0}.$$

Al simplificar, se obtiene que

$$V(w_0) = \frac{\sqrt{w_0}}{\sqrt{1 - \beta^2(1+r)}}$$

Otra manera de resolver el problema es suponer que la función valor es de la forma $V(w_0) = F\sqrt{w_0}$ y ajustar la constante F para que se cumpla la ecuación de Bellman. Se obtiene que $F = 1/\sqrt{1 - \beta^2(1+r)}$.

c) $c_{t+1} = \gamma c_t$, donde $\gamma = (\beta(1+r))^{\frac{1}{1-\alpha}}$. La función valor satisface

$$V(w_0) = \frac{w_0^\alpha}{\left(1 - \frac{\gamma}{1+r}\right)^{1-\alpha}} = \frac{w_0^\alpha}{(1 - \beta\gamma^\alpha)^{1-\alpha}}.$$

13.8

a) Resulta $c_t = (1 - \alpha\beta) A k_t^\alpha$ y $k_{t+1} = \alpha A k_t^\alpha$. La ecuación del cápital tiene puntos fijos $k_1^* = 0$ y $k_2^* = (\alpha A)^{\frac{1}{1-\alpha}}$. k_1^* es inestable y k_2^* es estable. En el largo plazo el capital tiende a k_2^*.

b) $V(k_0) = 2[\ln \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \ln \frac{1}{4}] + \frac{2}{3} \ln k_0 \approx -2.5725$.

13.9

a) $u'(c_t) = \beta R_t E_t(u'(c_{t+1}))$. Entonces $\frac{1}{c_t} = \beta R \frac{1}{c_{t+1}}$. Por lo tanto $c_t = \frac{1}{\beta R} c_{t+1} = \frac{1}{(\beta R)^2} c_{t+2} = \frac{1}{(\beta R)^3} c_{t+3} = \ldots = \frac{1}{(\beta R)^n} c_{t+n}$.

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{R^k} c_{t+k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta}{(\beta R)^k} c_{t+k} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k c_t = c_t \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k = \frac{1}{(1-\beta)} c_t$. Por lo tanto $c_t = (1-\beta)\left(a_t + \frac{YR}{R-1}\right) = (1-\beta) w_t$.

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_k^p}{R^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{R^k}\left(\frac{R-1}{R} a_t + y\right) = \left(\frac{R-1}{R} a_t + y\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{R^k} = \left(\frac{R-1}{R} a_t + y\right)\left(\frac{R}{R-1}\right) = a_t + \frac{R}{R-1} y = w_t$.

d) $c_t = (1-\beta)\left(a_t + \frac{YR}{R-1}\right) = (1-\beta)\left(\frac{R}{R-1}\right) y_t^p = \left(\frac{R-\beta R-R+1+(R-1)}{R-1}\right) y_t^p = \left(1 - \frac{\beta R-1}{R-1}\right) y_t^p$.

13.10

El sistema

$$v_t = \frac{\beta^2(1-v_{t-1})}{\beta^2(1-v_{t-1}) + v_{t-1}}$$

mapea $[0,1]$ en $[0,1]$ y tiene un único punto fijo $v^* = \frac{\beta(1-\beta)}{1-\beta^2}$. Además

$$v_{t+2} = \frac{\beta^2\left(1-v_{t+1}\right)}{\beta^2\left(1-v_{t+1}\right) + v_{t+1}} = \frac{\beta^2\left(1 - \frac{\beta^2(1-v_t)}{\beta^2(1-v_t)+v_t}\right)}{\beta^2\left(1 - \frac{\beta^2(1-v_t)}{\beta^2(1-v_t)+v_t}\right) + \frac{\beta^2(1-v_t)}{\beta^2(1-v_t)+v_t}}$$

$$= \frac{\beta^2\left(\beta^2\left(1-v_t\right) + v_t - \beta^2\left(1-v_t\right)\right)}{\beta^2\left(\beta^2\left(1-v_t\right) + v_t - \beta^2\left(1-v_t\right)\right) + \beta^2\left(1-v_t\right)} = \frac{\beta^2 v_t}{\beta^2 v_t + \beta^2 - \beta^2 v_t} = \frac{\beta^2}{\beta^2} v_t = v_t.$$

Por tanto, todos los puntos $v \neq v^*$ son de periodo dos.

13.11

a) $u'(c_t) = \beta R E_t(u'(c_{t+1}))$.

b) $c_{t+1} = c_t - \frac{1-\alpha}{D}\epsilon_t + \gamma_{t+1}$.

c) $c_{t+1} = c_t + \gamma_{t+1}$. Entonces el consumo también es una caminata aleatoria.